3650
Bibl. Mont

Ausführliche Anweisung

zum

Rechenunterrichte

in

Volksschulen

nach

der bildenden Methode

von

D. Heinrich Stephani,

königl. baierischen Kreis- Schul- und Kirchen-Rathe, des königl. Hausordens vom H. Michael Ehrenritter, und mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede.

Erster Kursus: die Zahlenrechenkunst.

Nürnberg,

bei Riegel und Wießner

1815.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seinen
ehrwürdigen und geliebten
Freunden,
Herrn Kanzler D. Niemeier
zu
Halle
und
Herrn Hofrath Gutsmuths
zu
Schnepfenthal,
widmet als Beförderern
der
Lautmethode

diese neue Rechenweise

zum

bleibenden Denkmahle

dankbarer

Liebe und Verehrung

der

Verfasser.

Vorrede.

Es giebt keinen Unterrichtsstoff, der zur Ausbildung der eigentlichen Denkkraft sich besser eignet, als die Zahl. An ihm vermag der Geist seine Kraft des Schaffens und Ordnens zu entfalten; durch ihn wird er gewöhnt, seinen Gegenstand scharf und vest aufzufassen, und stets mit klarer Besonnenheit zu Werke zu gehen; durch ihn wird er veranlaßt, seiner Erkenntniß durch innere anschauliche Gewißheit das Siegel der Vollendung aufzuprägen.

Gleichwohl wird fast kein Gegenstand in unsern Volksschulen schlechter behandelt als der Rechenunterricht. Der elende Mechanismus, der noch daselbst größten Theils herrschend ist, hat sich auch seiner bemächtiget, und ihn zu einer todten Gedächtnißübung herabgewürdiget. Nicht nur die ädle, der Bildung geheiligte Zeit wird dadurch vergeudet, sondern auch die herrliche Menschenkraft

kraft unserer National-Jugend geschwächt und wo möglich, selbst getödet.

Zwar hat sich lange schon von allen Seiten die Ueberzeugung ausgesprochen, daß das Rechnen in keiner Schule mehr als bloße Gedächtnißsache betrieben werden soll und darf, und es wurden auch in unsern Tagen ernstliche Anstalten getroffen, etwas besseres dafür in unsern Volksschulen aufzustellen; aber die Hülfe, die man schaffen wollte, trug den Geist des jetzigen Zeitalters an sich. Anstatt das Alte zu verbessern, warf man revolutionsmäßig auch hier alles über den Haufen, und schuf ein neues Unterrichtssystem, das viel zu gelehrt für Volksschulen, und im Grunde nur ein gesteigerter Mechanismus war, der um so leichter wieder in den gewöhnlichen ausarten mußte.

Aedle Männer meiner Nation! denen ich eine freundliche Aufnahme meiner Lesemethode verdanke, wodurch es dieser gelungen ist, den Mechanismus, der auch beim Leseunterricht allgemein herrschte, schon aus vielen Tausend Schulen zu verbannen, und für Deutschland das Zeitalter selbstthätiger Menschenbildung zu begründen, empfangt mit gleicher Güte und gleichem Zutrauen

trauen meine Rechenmethode, die von demselben höchsten Prinzipe der ächten Unterrichtskunst ausgeht, und ihres Stoffes wegen für Befähigung der menschlichen Selbstkraft mehr noch als jene frühere Methode des Lesens leisten wird.

Ich hoffe, auch in diesem Fache die einfachste, naturgemäßeste Lehrart aufgestellt zu haben. Eure Pflicht ist es, solche nicht nur mit Unpartheiligkeit und reinem gutem Willen für den großen Zweck des Unterrichts zu prüfen, sondern auch Versuche anzustellen, ob sie wirklich leistet, was ich von ihr aus nunmehr schon vieljährigen Erfahrungen in so vielen Schulen versichern kann, daß sie von Lehrern und Schülern leicht aufgefaßt wird, die Denkkraft der letztern ungemein bildet, und eine Fertigkeit im besonnenen Rechnen begründet, die nichts mehr zu wünschen übrig läßt.

Leistet sie dieses, so lasse man es sich lieber angelegen seyn, sie allgemein zu verbreiten, als seine Zeit auf Untersuchungen zu verwenden, was an meiner Rechenmethode neu sey, und worin ich mit andern Vorgängern zusammentreffe.

Man weiß schon aus meinen frühern Erklärungen, daß ich auf die Ehre, der Erfinder einer

Me-

Methode zu heißen, sehr gern Verzicht leiste, wenn ich nur ihren Werth anerkannt, und sie überall zum Segen der Menschheit in den Volksschulen eingeführt sehen werde. Auch halte ich es selbst für Thorheit, etwas ganz Neues im Erziehungssache noch in unsern Tagen aufstellen zu wollen. Nach den Vorarbeiten so vieler Jahrhunderte bleibt uns nichts weiteres zu thun übrig, als das schon Vorhandene zu verbessern und zu vollenden, oder mit den Zwecken der Erziehung in vollkommene Uebereinstimmung zu bringen.

Bei meiner Rechenmethode habe ich mich deßhalb bemüht, den Gang des bisherigen Rechenunterrichts so viel wie möglich beizubehalten, theils weil dieses den Lehrern am besten zusagt, und sie geneigter macht, sich an die neuere Lehrart anzuschließen, theils weil wirklich nichts anderes zu thun übrig war, als in diesem Fache das Alte zu verbessern, und man eben hierdurch desto leichter wird beurtheilen können, was an den mir eigenthümlichen Verbesserungen noch hinzugekommen ist.

Diese letztern bestehen vorzüglich darin, daß ich 1. das höchste Prinzip der Unterrichtskunst: „behandle jeden Lehrgegenstand als einen Stoff, an welchem sich die

Kräf-

Kräfte deiner Schüler selbstthätig für den Zweck ihres Daseyns entwickeln müssen," auf die Zahlenkunde aufs genaueste anzuwenden suchte. Die ganze Rechenkunst erscheint hier als eine Aufgabe für den jugendlichen Geist, die Zahlenwelt seiner Selbstkraft unterwürfig zu machen. Für meine Rechenschüler gibt es noch kein Zahlensystem, sondern sie müssen zur Begründung ihrer Geistesherrschaft dieß neue Reich selbst schaffen und ordnen. Für sie giebt es auch noch keine Rechenkunst, sondern sie müssen solche selbst auf gleiche Weise finden, wie sie vor uns vom menschlichen Geiste gefunden wurde.

2. Daß ich überall dafür sorgte, die Lehrer in Stand zu setzen, sich dessen, was sie hier zu leisten haben, deutlich bewußt zu werden. Denn so hart auch die Beschuldigung klingen mag, so ist sie doch nur allzugewiß, daß die meisten Schulmeister noch nicht wissen, was sie in den verschiedenen Unterrichtsfächern eigentlich zu thun haben. Zweifelt etwa noch jemand daran, der beobachte sie genau, um sich zu überzeugen, daß es bloß daran liegt, warum der Unterricht von den allermeisten so schlecht betrieben

wird

wird. Warum hat die elende mechanische Lesemethode des Buchstabirens noch jetzt ihre vielen Anhänger? Bloß darum, weil sie nicht wissen, was man eigentlich beim Leselehren zu thun hat, und worinn das Lesenlernen besteht. So wie ihnen die Augen hierüber aufgehen, verlachen sie selbst die Thorheit jener alten Methode und finden, daß die Lautmethode die einfachste und naturgemäßeste sey. — Noch stellen sie sich beim Rechenunterricht vor, daß es dabei auf weiter nichts abgesehen sey, als Rechenexempel zu fabriziren. Durch meine Methode zum Bewußtseyn ihres Thuns gebracht, das hierbei in Anspruch genommen wird, werden sie die treuesten und wärmsten Anhänger meines Denkrechnens werden, und sich nur darüber wundern, daß sie so lange das Rechnen mit ihren Schülern treiben konnten, ohne zu wissen, was eigentlich beim Rechnen geschehen müsse. — Am meisten glaube ich ihnen hierbei nützliche Dienste bei der Regel Detri und den vormals sogenannten Brüchen geleistet zu haben, wo am meisten Dunkel aufzuhellen war.

3. Daß ich die bisherigen sogenannten fünf Rechenspecies durch eine neue, das Ponderiren vermehrte. Diese einzige kleine Lücke war

aus-

auszufüllen, um unserm bisherigen alten Systeme der Rechenkunst seine Vollendung zu geben, und ihm dadurch ewige Haltbarkeit bei dem jetzigen Revoluzionsdrange unsers Zeitalters zu versichern. Durch diese neue Spezies wird der Mechanismus beim Rechnen völlig vernichtet, der sichere Grund zu einer selbstthätigen Handlungsweise dabei gelegt, und die Rechenkunst zu einem leichten Spiel des jugendlichen Geistes erhoben.

4. Daß ich den Rechenunterricht richtiger abgestuft habe, wie es der Gegenstand erforderte. Der erste Kursus befaßt sich bloß mit der Zahlenrechenkunst. Hier hat der Geist sich unmittelbar mit Zahlgrößen zu beschäftigen, sie selbst zu produziren, systematisch zu ordnen, zu ermessen, ihre Verhältnisse zu ergründen, und die unbekannten Zahlen auf die stattfindende verschiedene Rechnungsweise alsbald aufzufinden. — Der zweite Kursus hat es mit Ziffern, folglich nur mittelbar mit Zahlen oder mit dem symbolischen Rechnen, zu thun, und umfaßt daher die Zifferrechenkunst. Im Grunde hat hier der Geist nur die Operation des ersten Kursus an den Repräsentanten der Zahlgrößen, den Ziffern, zu wiederhohlen,

und

und hierdurch mit einem wichtigen Erleichterungs=mittel versehen, eine Menge von Zahlgrößen vest=halten und übersehen zu können, die erlernte Kunst zu der Fertigkeit zu steigern, die schwierigsten Auf=gaben ohne sonderliche Mühe zu lösen. — Der dritte Kursus ist der bürgerlichen Rechen=kunst gewidmet und enthält nichts anderes als eine Anwendung der bis dahin gewonnenen Rechen=fertigkeit auf die im bürgerlichem Leben vor=kommenden benannten Zahlgrößen und prak=tischen Aufgaben, um die aus der Schule in jenes übertretenden Schüler hiermit gehörig aus=zustatten.

Man sieht hieraus zugleich, daß dieser drei=fache Kursus sich an die dreifache Klassen Einthei=lung unserer Volks= oder Elementarschulen genau anschließt, daher über die Bestimmung jener für diese nichts weiter hinzusetzen ist.

Der Verfasser.

In=

Inhalt.

Einleitung: vom Rechnen überhaupt.
Was heißt rechnen? §. 1.
Was ist die Rechenkunst? §. 2.
Unterschied zwischen dem mechanischen und dem bildenden Rechenunterrichte. §. 3.
Unterschied zwischen Zahl und Ziffer §. 4.
Mündliches und schriftliches Rechnen. §. 5.
Unterschied zwischen dem Denk- und dem sogenannten Kopf-Rechnen. §. 6.
Von der ersten Grundübung der Rechenkunst, dem Numeriren. §. 7.
Von dem Baue des Dezimalsystems und dem dabei nöthigen Hülfswerkzeuge §. 8.
Von der zweiten Grundübung der Rechenkunst, dem Ponderiren. §. 9.
Von den vier einfachen Arten der Rechenkunst. §. 10.

Vom

Vom Addiren und Multipliciren. §. 11.
Vom Subtrahiren und Dividiren. §. 12.
Von der Regel Detri oder der schließenden Rechnungsart. §. 13.
Von ganzen und vom Theil-Zahlen. §. 14.
Von ungenannten und genannten Zahlen §. 15.

Erster Kursus des Denkrechnens oder die Zahlenrechenkunst.

I. Grundübungen.

A. Numeriren oder Zahlordnen.

Vorbemerkung. §. 16.
Erbauung des Dezimalsystems. §. 17.
Methodisches Verfahren bei Erbauung der ersten Zahlenordnuug. §. 18.
Methodisches Verfahren bei Erbauung der zweiten Zahlenordnung. §. 19.
Methodisches Verfahren bei Erbauung der dritten und vierten Zahlenordnung. §. 20.
Methodisches Verfahren bei Verbindung der vier ersten Zahlenordnungen. §. 21.
Kenntniß der geraden und ungeraden Zahlen. §. 22.

B. Ponderiren oder Zahlenmessen.

Vorbereitung. §. 23.
Methodisches Verfahren bei dem Ponderiren.
a) Der ersten Zahlgröße Zwei. §. 24.
b.) Der Zahlen Drei und Vier. §. 25.
c.) Der übrigen Zahlen der ersten Ordnung. §. 26.

d.) Der Zahlen der zweiten Ordnung. §. 27.
e.) Der dritten und vierten Ordnung. §. 28.
f.) Der Zahlen, die aus verschiedenen Ordnungen zusammengesetzt sind. §. 29.
Beweis, daß die Schüler nun auch schon rechnen können. §. 30.
II. Vom Addiren und Multipliziren, oder von der einfachen Art, Zahlen bloß durchs Verbinden zu finden.
a.) Vom Addiren überhaupt. §. 31.
Addiren mit Zahlen der ersten Ordnung. §. 32.
Addiren mit zwei Zahlen der zweiten Ordnung oder mit Zehnern. §. 33.
Addiren mit zwei Zahlen, die aus der ersten und zweiten Ordnung bestehen. §, 34.
Addiren mit drei und vier Zahlen aus den vier Grundordnungen. §. 35.
b.) Vom Multipliciren überhaupt. §. 36.
Multiplikations Uebungen mit Zahlen aus der ersten Ordnung. §. 37.
Das Einmahl.Eins nach der bildenden Methode. §. 38.
Das große Einmahl Eins nach derselben Methode. §. 39.
Prüfungs Aufgaben ohne Reihenfolge. §. 40.
III. Vom Subtrahiren und Dividiren, oder von der einfachen Art Zahlen durch Trennung zu finden.
a.) Vom Subtrahiren überhaupt. §. 41.

Sub-

Subtrakziums Uebungen mit Zahlen aus der ersten Ordnung in systematischer Reihe. §. 42.
Subtrahiren der Zahlen erster Ordnung vom Hundert bis auf Eins zurück, in systematischer Reihe. §. 43.
Subtrahiren mit gemischten Zahlen ausser der Reihe. §. 44.
Probeübungen. §. 45.

b. Vom Dividiren überhaupt. §. 46.
Vorübungen. §. 47.
Divisions Uebungen in systematischer Reihenfolge.
a.) mit Theilern und Quotienten aus der ersten Zahlenordnung. §. 48.
b.) Mit Theilern von 11 bis 20 Quotienten der ersten Zahlenordnung. §. 49.
c.) Mit Theilern der ersten Ordnung und Grundzahlen, welche aus der ersten und zweiten Ordnung zusammen gesetzt sind. §. 50.
d.) Mit dreifachen Grundzahlen. §. 51.
e.) Einige Prüfungs-Exempel. §. 52.

IV. Von der Regel Detri oder der schließenden Rechnungsart.
Vorerinnerung. §. 53.
Vom Schließen im Rechnen überhaupt. §. 54.
Von den vier Zahlgliedern in einem Rechenschlusse. §. 55.
Von dem Verhältnisse der Zahlglieder unter einander. §. 56.

Re-

Rechenschlüsse mit einem größern Zahlgliede, das in dem erstern aufgeht. §. 57.
Rechenschlüsse mit wachsendem Verhältnisse und ungleichen Zahlen. §. 57.
Einige Exempel von dem bisherigen Schlußrechnen in unsystematischer Folge. §. 58.
Rechenschlüsse mit einem kleinern zweiten Zahlengliede, das in dem erstern aufgeht. §. 59.
Von Versetzung der drei Zahlglieder. §. 60.
V. Vom Rechnen mit Theilzahlen.
a.) Vorerinnerung. §. 61.
b.) Hülfsmittel. §. 62.
c) Methodisches Verfahren. §. 63.
d.) Numeriren oder Ordnen der Theilzahlen §. 64. bis §. 66.
e.) Ponderiren §. 67.
I. In je mehr Theile das Ganze getheilt wird, je kleiner werden jene. §. 68.
II. Das Theilganze bleibt sich gleich, es mag in noch so viele Theile getheilt werden als man will. §. 69.
III. Werden die Theilzahlen und die Theilganzen gleich vergrößert, so bleiben sich die erstern immer gleich. §. 70. 71.
IV. Um Theilzahlen gleichnahmig zu machen, darf man nur wechselseitig die Theilzahl und das Theilganze in so viele Theile weiter zerlegen, als das andere Theilganze Theile hat. §. 72. 73.

f.) Addition mit Theilzahlen. §. 74.
g.) Multiplikation mit Theilzahlen. §. 75.
h.) Subtrakzion mit Theilzahlen. §. 76.
i.) Division mit Theilzahlen. §. 77.
k.) Regel Detri oder Schlußrechnen mit Theilzahlen. §. 78.

Ein-

Einleitung
vom
Rechnen überhaupt.

§. 1.

Was heißt rechnen?

Rechnen heißt kurz und gut: Zahlen suchen. Wenn ich wissen will, wie viele Kinder in der Schule sind, so muß ich sie entweder einzeln zählen, oder die Zahl der auf jeder Bank sitzenden addiren. Wenn ich die Zahl suche, welche angiebt, um wie viele Köpfe die eine Klasse von Schülern die andere übersteigt, so rechne ich gleichfalls. Dasselbe thue ich, wenn ich wissen will, wie viel eine Maß Wein kostet, wenn für den Eimer 18 fl. bezahlt werden. Habe ich die Zahl gefunden, so brauche ich nicht mehr zu rechnen; das Geschäft ist schon vorbei.

Anm. Die gewöhnliche Angabe, rechnen heiße eine Zahl finden, ist folglich unrichtig; so wie der Beisatz, durch Hülfe bekannter Zahlen eine unbekannte finden, überflüßig. Denn wer sucht wohl eine schon bekannte Zahl? Und wie können Zahlen anders als mittelst der Zahlen gefunden werden?

§. 2.

Was ist die Rechenkunst?

Diese Frage kann in einem doppelten Sinne genommen werden, je nachdem ich mir die Rechenkunst in

oder

oder ausser dem Menschen (subjektive oder objektive) vorstelle. In ersterm Sinne ist sie die von einem Menschen gewonnene Fertigkeit, Zahlen leicht und sicher zu finden. Im zweiten Sinne ist sie eine Anweisung (mündlich oder schriftlich) wie man Zahlen leicht und sicher finden kann. Leicht muß nach ihrer Angabe jede gesuchte Zahl zu finden seyn, weil ihr Zweck eben darin besteht, dem Menschen das Geschäft des Rechnens durch gewisse Regeln oder Kunstgriffe zu erleichtern; sicher muß es seyn, weil sich Ungewißheit mit nichts weniger als mit dem Rechnen verträgt.

§. 3.

Unterschied zwischen dem mechanischen und dem bildenden Rechen-Unterrichte.

Man kann die Menschen zu künstlichen Rechenmaschinen durch Hülfe des Gedächtnisses abrichten, und diese Verfahrungsweise nennt man die mechanische Methode. Die auf diese Weise abgerichteten Schüler wissen mit Schnelligkeit anzugeben, wie viel z. B. 6 mal 6 ist, oder wie viel 6 Eier kosten, wenn das Schock um 1 ½ fl. verkauft wird. Aber sie haben hiervon keine anschauliche Gewißheit, sondern sie bringen bloß hervor, was ihr Gedächtniß leidend aufgefaßt hat. Sie gleichen daher wirklich Rechenmaschinen, deren man schon mehrere erfunden hat. Es kann ihnen jedoch nicht einmahl gleicher Werth mit diesen zugeschrieben werden, weil der Mensch ohne

beständige Uebung diese Gedächtnißfertigkeit bald verliehrt.

Da es uns bei dem Unterrichte keines Weges um den kleinern Zweck, die Rechenfertigkeit selbst, zu thun ist, sondern um den höchsten Zweck des Unterrichts, der in zweckmäßiger Befähigung der menschlichen Selbstkraft besteht, so ist die bildende Methode auch in diesem Fache des Unterrichts der mechanischen unendlich vorzuziehen. Ueberdieß hat die Erfahrung schon bewiesen, daß durch jene Lehrart zugleich in der allerkürzesten Zeit die fertigsten Rechner für das Leben gebildet werden.

Dieser bildende Rechenunterricht besteht darin, daß die Fertigkeit nicht in die Zöglinge hinein gelegt, sondern aus ihnen hervorgerufen wird; daß die Denkkraft derselben sich nicht leidend verhalten, sondern durchaus selbstthätig äussern muß. Für sie ist daher weder ein Zahlensystem noch eine Rechenkunst vorhanden, sondern sie bringen beide durch eigene Kraft selbst hervor. Eben hierdurch wird bei der Jugend eine Befähigung ihrer Menschenkraft gewonnen, deren Werth nicht hoch genug geschätzt werden kann, ob sie schon nur einen Theil der allgemeinen Bildung ausmacht.

§. 4.

Unterschied zwischen Zahl und Ziffer.

Nicht gering ist die Anzahl der Lehrer, welche zur Zeit eben so wenig Zahl und Ziffer unterscheiden können,

können, als sie vor Bekanntschaft mit der Lautmethode Nahme und Laut der Buchstaben zu unterscheiden wußten. In eben dieser Unkunde liegt der Grund ihrer blinden Anhänglichkeit an die alte mechanische Lehrweise. Soll ihnen Sinn für die bildende Methode abgewonnen werden, so müssen sie sich durchaus bequemen, vor allen Dingen diesen Unterschied aufs deutlichste aufzufassen, wozu ihnen folgende Erklärung nützlich seyn wird.

Die Zahl ist eine Größe, welche die Eins zum Grundelemente hat. Eins mit Eins zu einem Ganzen verbunden gibt die Zahlgröße, welche man zwei nennt. Zu lezterer Größe wieder Eins hinzugefügt, gibt eine neue Zahlgröße, welche Drei heißt. Die Ziffer 3 ist das bloße Zeichen, bei dessen Anblicke wir an die Zahlgröße erinnert werden, welche aus Eins und Eins und Eins besteht. Der Nahme Drei bezeichnet sowohl die Ziffer 3 als die Zahlgröße 3 (Eins und Eins und Eins.) Weil wir zu jeder neuen Zahlgröße, nur Eins hinzuthun dürfen, um wieder eine neue Zahl zu erhalten, und damit in Ewigkeit fortfahren können, so gibt es unendlich viele Zahlen.

Gleichwohl brauchen wir nur zehen Zeichen oder Zahlbuchstaben, um damit jede Zahl auszudrücken. Diese zehn Zeichen bilden folgende Figuren: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Diese Zeichen sind die Zahlen nicht selbst, sondern sie erinnern uns nur an eine gewisse Zahlengröße, wie die Buchstabenfiguren uns an gewisse Sprachlaute erinnern. So wie sich

aber

aber Buchstabe zum Laute verhält, so verhält sich die Ziffer zur Zahl.

Nur ein Unterschied findet sich zwischen beiden noch. Der Buchstabe kann nur gesehen, der Laut nur gehöret werden. Beide sind ausser uns vorhanden, und jener wird durch das Auge, so wie dieser durch das Gehör wahrgenommen. Die Ziffer ist zwar auch etwas, das wir mit dem Auge als ausser uns befindlich wahrnehmen können; aber nicht gleiche Bewandtniß hat es mit der Zahl. Diese ist nicht ausser uns, sondern nur in uns vorhanden. Die Zahlgröße Fünf z. B. ist wirklich nicht ausser uns, sondern in uns; sie ist nähmlich die durch unser Denkvermögen gebildete Größe von 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Die Zahlgröße 5. besteht nicht aus 5 Fingern, 5 Kreuzern, 5 Pferdten, sondern aus der Größe, die wir uns bloß in Gedanken aus öfterm Hinzuthun der Eins zu der Eins bilden, und wozu uns auch äussere Gegenstände veranlassen können, auf die wir die Zahlenbegriffe anwenden.

Anm. Die elende mechanische Lesemethode des Buchstabirens findet nur darum noch hin und wieder treue Anhänger, weil sie von dem Laute der Buchstaben keinen deutlichen Begriff haben, und ihn daher auch nicht von dem Nahmen derselben zu unterscheiden wissen. So wie die Anhänger der einzig wahren Lesemethode, der bildenden, hierüber aufgeklärt wurden, sahen sie den gemeinen Irrthum ein, und erkannten den Laut für das Prinzip

zip der Lesekunst. Eben so hält die Meinung, daß die Ziffer die Zahl selbst sey, die meisten Lehrer in der mechanischen Rechenmethode gefangen, wovon keine Erlösung eher statt finden kann, als bis sie sich von dem Wesen der Zahl einen so deutlichen Begriff erworben haben, daß sie solche nicht weiter mit der Ziffer für gleichnahmig halten. Denn zur Zeit denken sie z. B. beim Anblick der Ziffer 3 nur an den Nahmen Drei, und so auch umgekehrt; nicht aber an die Zahlgröße (1 + 1 + 1 oder 2 + 1), die durch Ziffer und Nahme angedeutet wird.

§. 5.

Mündliches und schriftliches Rechnen.

Alles schriftliche Rechnen führt, weil man es hier nur mit Ziffern zu thun hat, seiner Natur nach zu einem mechanischen Verfahren, wenn man früherhin nicht schon zum Denkrechnen angeleitet worden ist. Dem schriftlichen Rechnen muß daher das mündliche als das wahre Fundament der bildenden Rechenmethode vorausgehen, und man wird mithin wohl thun, wenn man aus der untern Klasse der Volksschulen das erstere ganz verbannt, und den Unterricht bloß auf das zweite beschränkt.

Dieses mündliche Rechnen hat es lediglich unmittelbar mit den Zahlen selbst zu thun, so wie das schriftliche nur mittelbar mit denselben, weil

es

es sich nur unmittelbar mit den Ziffern befaßt. Eben deßhalb kann ersteres auch das Zahlenrechnen und letzteres das Ziffernrechnen genannt werden, um beide durch eine genaue Bezeichnung um so besser künftig zu unterscheiden.

Anm. So wie man, um sich den Geist und die Verfahrungsweise der Lautmethode beim Lesenlehren völlig eigen zu machen, im ersten Jahre alle Buchstaben-Nahmen sorgfältig vermeiden muß, so muß man auch, um den Geist und die Verfahrungsweise des Denk- oder Zahlrechnens wohl aufzufassen, die Ziffer für den ersten Kursus ganz bei Seite legen. Lehrer und Schüler müssen sich gewöhnen, bei jedem Zahlnahmen (Drei, Vier rc.) nicht an eine Ziffer, sondern an die von ihm bezeichnete Zahlgröße zu denken. Laßt den Lehrern die Buchstaben-Nahmen und die Ziffern, und sie werden sich ewig an diese hängen und ihrer alten Gewohnheit des Buchstabirens und mechanischen Rechnens treu bleiben. Entreißt ihnen diese, und sie sehen sich nun von selbst genöthiget, sich der bildenden Methode des Lesens und Rechnens zu befleißigen. Eben deßhalb muß darauf bestanden werden, daß Buchstaben-Nahmen und Ziffern für das erste Jahr des Elementarunterrichts ganz aus den Schulen verbannt werden.

§. 6.

§. 6.
Unterschied zwischen dem Denk- (Zahl-) Rechnen und dem sogenannten Kopfrechnen.

Damit man beides nicht ungebührlich miteinander verwechsle, wie man schon an mehreren Orten zu thun geneigt ist, muß hier nachdrücklich auf den wesentlichen Unterschied zwischen beiden aufmerksam gemacht werden.

Bei unserm Denk- oder Zahl-Rechnen hat man es lediglich nur mit Zahlen zu thun, indem die Schüler von den Ziffern noch keine Kenntniß haben; bei dem Kopfrechnen hingegen nur mit Ziffern. Aus der verschiedenen Verfahrungsweise, welche beiden eigen ist, soll dieß hier deutlicher gemacht werden.

Bei der Aufgabe z. B. die Zahl zu finden, welche so viele Einheiten enthält als die Zahlen 13 und 14 zusammen, verfährt der Schüler des Denkrechnens auf folgende Weise. Er denkt sich unter 13 die Zahlgröße zehn und drei, und unter 14 zehn und vier, verbindet die beiden Zehner zu Einer Größe, welche zwanzig heißt, und die 3 und 4 Einer zu der Größe, welche sieben heißt, und spricht, indem er beide Größen wieder mit einander verbindet, beide machen 27 aus.

Beim Kopfrechnen schreibt hingegen der Rechenschüler die Ziffern 13 und
14 in Gedanken hin,
macht einen Strich
und spricht mechanisch, 3 und 4 ist 7, was er unter die

die erste Zifferreihe schreibt; und 1 + 1 ist 2, was er unter die zweite Reihe setzt; und spricht dann: 27.

Sagt man zu dem letztern Schüler, diese Angabe sey falsch, so wiederhohlt er sein mechanisches Gedächtniß-Kunststück noch ein Mahl, weil er von seinem Thun keine anschauliche oder mathematische Gewißheit hat. Im Gegentheil wird der Schüler der bildenden Methode gegen einen solchen Zweifel seinen Unwillen äussern, und damit die Ueberzeugung von der mathematischen Unmöglichkeit ausdrücken, daß zwei Zehner nicht zwei Zehner oder Zwanzig, drei und vier nicht Sieben, und beides zusammen nicht 27 ausmachen sollen.

Anm. Man sieht also hieraus, daß das sogenannte Kopfrechnen kein eigentliches Kopf oder Denk- sondern nur eine mechanische Zifferrechnung durch Hülfe des Gedächtnisses sey. Der ganze Unterschied zwischen demselben und dem mechanischen schriftlichen Rechnen besteht darin, daß dort die Ziffern nicht so wie hier von der Hand angeschrieben, sondern bloß von der Einbildungskraft produzirt werden. Man muß deßwegen sehr nachdrücklich hierauf aufmerksam machen, weil wirklich viele meinen, in dem sogenannten (dem mechanischen) Kopfrechnen sey das gesuchte Heil bereits gefunden worden, und es daher auch ungebührlicher Weise für Denkrechnen ausgeben. Der Mechanismus hat hier bloß eine andere Gestalt angenommen, um in dieser seine Schulherrschaft desto länger behaupten zu können.

§. 7.

§. 7.
Von der ersten Grundübung der Rechenkunst, dem Numeriren.

Man hat vormahls das Numeriren den 4 einfachen Rechnungs-Arten, eine Zahl durch Vermehrung oder Verminderung zu finden, als dahin gehörig beigezählt. Da es aber ganz von diesen verschieden ist, so thut man besser, solches nebst dem Ponderiren als die beiden Grundübungen der Rechenkunst ganz abgesondert voran zu schicken.

Das Numeriren muß aber dem eigentlichen Rechnen deßwegen als Vorübung vorausgehen, weil die Schüler erst die Zahlenwelt genau kennen müssen, ehe sie irgend eine Aufgabe in derselben zu lösen im Stande sind.

Es besteht dasselbe in nichts anderm als im Ordnen der unendlichen Menge möglicher Zahlen. So wie wir alle Körper der Naturwelt in Ordnungen eintheilen müssen, um sie der Denkkraft unseres Geistes dadurch unterwürfig zu machen: so kann auch der Mensch zur Herrschaft oder Gewältigung der Zahlenwelt nur erst dadurch gelangen, daß er sie in Ordnung bringt und sie dadurch übersehen und handhaben lernt.

Für unsere Schüler ist jedoch noch kein Zahlensystem vorhanden, das nach alter mechanischer Methode von ihnen nur bloß zu Gedächtniß zu bringen seyn würde, sondern sie müssen durch eigene Kraft diese Zahlen-

lenwelt hervorbringen, und sie zur Begründung ihrer Herrschaft über dieselbe, solche selbstthätig in eine zweckmäßige Ordnung bringen.

§. 8.

Von dem Baue des Dezimalsystems und dem dabei nöthigen Hülfswerkzeuge.

Um unsere Schüler jedoch unter den vielen möglichen Zahlensystemen auf das praktisch beste, und deßwegen in der kultivierten Welt allgemein aufgenommene hinzuleiten, werden sie angehalten, sich hierbei desselben Hülfswerkzeuges zu bedienen, was die große Lehrerinn Natur bei dem Unterrichte des Menschengeschlechtes in diesem Fache gebraucht, und womit sie auch jeden Menschen ausgestattet hat. Dieses Werkzeug sind unsere zehn Finger, welche alle künstlichen Rechenmaschienen unserer Pädagogen übertreffen, und die unsere Kinder alle unentgeldlich zur Hand haben.

Durch Hülfe der zehn Finger, ist das so einfache Dezimal-System erfunden worden, indem man die zehn Finger, eben so wie die Eins bei der ersten Zahlordnung oder den Einern, zu einem Elemente einer neuen Ordnung, der Zehner, erhob; die 10 mal 10 oder das Hundert zu einem Elemente einer dritten Ordnung erschuf, und so in zehnfacher Steigerung immer weiter das Zahlensystem in so lange fort erbaute, als man solches fürs Leben nöthig hat.

Dieses Zahlensystem wird von unsern Schülern zur Bildung ihrer Selbstkraft immer wieder neu erfunden

den

den, und wir Lehrer haben dabei nichts weiteres zu thun, als die Aeusserung ihres produktiven Vermögens gehörig zu leiten. Ausser dem Gewinne, daß sie hierdurch ihre Geisteskraft richtig üben und entfalten lernen, gelangen sie zu einer völlig anschaulichen Uebersicht des Zahlensystems als ihres eigenen Produktes, wozu die mechanische Rechenmethode ihre Schüler niemahls führen kann.

Anm. So leicht es für jedes Kind ist, dieß Zahlensystem unter der Leitung eines vernünftigen Lehrers selbst zu erfinden, und dadurch zu einem deutlichen Begriffe von jeder Zahlgröße zu gelangen: so schwer hält es oft selbst für erwachsene und gebildete Personen, sich von mancher Zahl z. B. von 10,000 oder 100,000 oder einer Million einen deutlichen Begriff zu machen. Deutlich wird ihnen dieß nur dann, wenn sie z. B. sich in 1 Schule 100 Schüler jeden mit 10 Fingern denken. Zehn solche Schulen auf 10 Dörfern umher bilden erst die Summe von 10,000 Fingern. Hundert dergleichen Schulen werden erfordert, um 100,000 Finger, und 1000 um 1 Million zu erhalten.

§. 9.

Von der zweiten Grundübung der Rechenkunst, dem Ponderiren.

Von dem Numeriren oder Zahlenordnen schritt man bei dem bisherigen Rechnungsunterrichte in Volksschulen so-

gleich zum Addiren und den übrigen einfachen Rechnungs-Arten, ohne die große Lücke wahrzunehmen, die erst zwischen beiden ausgefüllt werden muß. Wenn auch die Schüler durch das Numeriren alle Zahlen selbstthätig bilden lernen, so geschieht dieß doch von ihnen so flüchtig und mit so geringer Reflekzion, wie der Mensch überhaupt in den ersten Jahren seines Lebens zu handeln pflegt, daß sie doch keinen völlig deutlichen Begriff von der Größe oder den Bestandtheilen jeder Einzelnen derselben haben, und eben deßwegen auch so lange nicht im Stande sind, das Verhältniß der Zahlen unter sich leicht und sicher aufzufassen, worin das Hauptwesen der Rechenkunst besteht.

Auf das Numeriren lassen wir daher als zweite Grund- oder Vorübung das Ponderiren, oder das Ermessenlernen folgen, wie viele Einheiten jede Zahlgröße in sich enthält. Sind die Rechenschüler hierin vollkommen geübt worden, so haben sie die ganze Rechenkunst schon inne, wie in der Folge nachgewiesen werden soll.

Anm. Es verhält sich hiermit gerade wieder so, wie mit dem Lautiren. Haben die Kinder die Fertigkeit erlangt, jeden Laut eines Buchstabens rein anzugeben, so können sie auch schon solche in der Reihe aussprechen, wie sie in einem Worte vorkommen. Und wer dieses schnell angeben kann, der kann auch lesen. Natürlicherweise kann jede Fä-

higkeit nur durch Uebung zur vollen Fertigkeit gesteigert werden.

§. 10.

Von den vier einfachen Arten der Rechenkunst.

Zahlen lassen sich finden entweder durch Verbindung und Trennung gewisser Zahlgrößen, oder durch den Schluß, der aus dem Verhältnisse eines gegebenen Zahlenpaares auf ein zweites Paar gemacht wird, von welchen letzteren aber die eine Zahl noch unbekannt ist.

Das erste Verfahren erzeugt die vier einfachen Rechnungsarten des Addirens und Multiplizirens, des Subtrahirens und Dividirens; das letztere die Regel Detri oder von den drei Gliederzahlen, wovon die vierte noch gefunden werden soll.

Anm. 1.) Die übrigen Rechnungsarten haben alle diese einfachen zu ihrem Fundamente, und können eben deßhalb für diejenigen Schüler, welche diese wohl gefaßt haben, keine besonderen Schwierigkeiten mehr enthalten. Von den zusammengesetzten Rechnungsarten sind nur einige für die oberste Klasse der Volksschulen nöthig, weil sie im bürgerlichen Leben häufig vorkommen. Uebrigens aber reichen die einfachen Rechnungsarten für den Hauptzweck des Rechenunterrichts in Elementarschulen, für

für allgemeine Geistesbildung, hin, weßhalb auch hierin das gehörige Maß nicht überschritten werden darf, um nicht andedere Unterrichtszweige zu beeinträchtigen.

2.) Ein Fehler aller bisherigen Rechenbücher war, den man sich aber aus dem Vorhergehenden sehr gut wird erklären können, daß sie das Wesen und den Unterschied der verschiedenen Rechnungsarten nicht angaben, sondern dieß auf sich beruhen ließen. Eben darin liegt auch der Grund, warum die Erlernung der Rechenkunst von vielen für schwer gehalten wird. Durch gegenwärtige Anweisung über die einfache Operationsweise des menschlichen Geistes belehrt, werden viele von diesem Irrthume zurückkommen, und mit Vergnügen in spätern Jahren eine Fertigkeit nachhohlen, die ihnen in der Jugend, der Methode wegen, unannehmlich vorkam.

§. 11.

Vom Addiren und Multipliziren.

Addiren heißt die Zahl suchen, welche so viele Einheiten enthält als mehrere angegebene Zahlen zusammen genommen. Gefunden kann sie nur durchs Zusammenzählen (durch Verbindung) der letztern gefunden werden. Z. B. 2+3=5

Lies: zwei und drei ist fünf, oder fünf ist die gesuchte Zahlgröße, welche so viele Einheiten enthält als zwei und drei zusammen genommen.

Multipliziren heißt die Zahl suchen, die so viele Einheiten enthält als eine angegebene Zahl, wenn ich sie so vielmahl zu sich selbst addire, als eine andere Zahl Einheiten enthält, z. B. ich soll die Zahl suchen, die so viele Einheiten enthält, als die Zahl 2 wenn ich solche drei mal zu sich selbst addire. Diese gesuchte Zahl ist 6 und konnte nur durch oftmahliges Addiren der angegebenen Zahl zu sich selbst gefunden werden. Das Multipliziren ist daher nur ein abgekürztes Addiren, das in dem Fall statt findet, wenn die Gesammtzahl von einerlei Zahlgrößen gefunden werden soll. Anstatt zu sagen, 2 und 2 ist 4 und 2 ist 6 spricht man 2 drei Mal zu sich selbst addirt, oder 3 + (mal) 2 ist 6.

Beide gesuchte Zahlen, die 5 beim Addiren und die 6 beim Multipliziren wurden durch Vergrößerung oder Vermehrung der angegebenen Zahlen um so viele Einheiten gefunden, als die übrigen Zahlen enthielten.

Eben deßhalb, weil sie beide Eine einfache Rechnungsart zusammen ausmachen, finden wir es sowohl natürlicher als auch zweckmäßiger, sie auf einander folgen zu lassen, als sie mit den folgenden einfachen Rechnungsarten zu vermengen.

Anm. Bisher ließ man auf das Addiren das Subtrahiren, auf dieses das Multipliziren, und auf letztere

teres wieder das Dividiren folgen. Weit natürlicher aber ist es, die Rechnungsarten, welche mit der Vergrößerung, und diejenigen, welche mit der Verkleinerung zu thun haben, ungetrennt auf einander folgen zu lassen. Zweckmäßiger aber ist es, weil es für den Geist leichter ist, dieselbe Operationsweise mit einer geringen Veränderung vorzunehmen, als darzwischen zu einer andern überzuspringen.

§. 12.

Vom Subtrahiren und Dividiren.

Subtrahiren heißt die Zahl suchen, die so viele Einheiten enthält, als eine gegebene Zahl dann noch enthält, wenn sie um eine gewiße Anzahl von Einheiten vermindert wird. Z. B. die Aufgabe: wie viele Einheiten enthält die Zahl 7 noch, wenn sie um drei Einheiten vermindert wird. 4 ist die gesuchte Zahl.

Dividiren ist eben so wohl nichts weiteres als ein wiederhohltes oder oftmahliges Subtrahiren, gleichwie wir auch oben das Multiplizirен für ein abgekürztes Addiren erkannten. Hier wollen wir die Zahl finden, die uns angibt, wie oftmahls wir eine gewisse Zahl von einer andern angegebenen subtrahiren können. Wie oft z. B. kann 2 von 10 weggenommen werden, oder wie oft können wir 10 um 2 vermindern. 5 ist die gesuchte Zahl, welche mir angibt, wie oft ich dieses bewerkstelligen kann.

Hier,

Hieraus ist zugleich klar, daß bei beiden Rechnungsarten die gesuchten Zahlen durch Trennung gefunden werden. Beide oben angeführten Zahlen, 4 und 5, wurden durch einerlei Operationsweise, nämlich dadurch gefunden, daß wir im ersten Falle die Zahl 7 um 3 und im zweiten um 2, so oftmahls, als es möglich war, verringerten. Nur verfuhren wir dabei auf eine abgekürzte Weise, weil dieß für uns nach vorher erworbener Fertigkeit keine Schwierigkeit mehr hatte. Anstatt also zu operiren 2 von 10 bleibt 8, 2 von 8 bleibt 6, 2 von 6 bleibt 4 u. s. w. sagen wir gleich, 2 kann von 10 fünfmahl genommen werden, oder ist darin 5 mahl enthalten.

§. 13.

Von der Regel Detri oder der schließenden Rechnungsart.

Den ersten Nahmen führt diese Rechnungsart daher, weil sie in ihrer einfachen Form aus drei Zahlansätzen oder Zahlgliedern besteht. Z. B., wenn 1 Pfund Zucker 1 Gulden 12 Kreuzer kostet, wie viel kosten 3 Pfund? — Zweckmäßiger dürfte sie künftig die schließende Rechnungsart genannt werden, weil dadurch die eigentliche Operation des Geistes, welche dabei statt findet, genau bezeichnet wird, und es von höchster Wichtigkeit für den Pädagogen seyn muß, den Menschen zum Bewußtseyn seines eigentlichen Thuns bei jeder Handlung zu bringen.

Daß

Daß diese Rechnungsart auf einem wirklichem Schlusse beruht, sieht man aus dem obigen Beispiele. Vollständig gelöst lautet diese Rechnungsaufgabe: wenn 1 Pfund 1 Gulden 12 Kreuzer kostet; so müssen 3 Pfunde als eine dreimahl größere Quantität Waare auch dreimahl so viel Geld, folglich 3 Gulden und drei mahl 12 oder 36 Kreuzer kosten.

Eben hieraus erhellt zugleich auf dem ersten Anblicke schon, wie leicht die Operation dieser Rechenart gemacht werden kann, wenn sie dieser ihrer Natur nach deutlich aufgefaßt wird. Selbst wenn bei diesem schließenden Verfahren in der Aufgabe 4, 5 oder noch mehrere Sätze vorkommen, darf man nur die einfache Schlußform zu Grunde legen, um jene ohne Schwierigkeit zu lösen. Es sind diese aus mehr als 3 Sätzen bestehenden Aufgaben nichts weiter als zusammengesetzte Schlüße, zu deren Berichtigung nichts anders erforderlich ist, als sie in ihre einzelnen Bestandtheile aufzulösen. Worauf hierbei als auf das Wichtigste gesehen werden muß, ist bloß die Einhaltung richtiger Schlußform.

Ohne unser Errinnern wird man hieraus zu folgern geneigt seyn, wie vieles auch von dieser Seite die Rechenkunst für die Entwicklung des höhern Denkvermögens beizutragen im Stande seyn müsse, wofern bei ihr das Prinzip der bildenden Methode zu Grunde gelegt wird.

§. 14

§. 14.

Von ganzen und von Theil-Zahlen.

Die vorkommenden Zahlen bilden entweder eine für sich bestehende Größe, oder sie enthalten nur die Theile einer andern, in gleiche Theile zerlegten Größe. Z. B., 1. 6. 12. 60. sind für sich bestehende Größen oder ganze Zahlen; hingegen 1 Halbes 6 Achtel 12 Zwanzigtel, 60 Hundertel sind Zahlen, welche eine gewisse Anzahl einer in gleiche Theile zerlegten Zahlgröße angeben. Eben deßhalb führen diese letztern den Nahmen Theilzahlen, inwiefern sie nur die Theile einer gewissen Größe enthalten. Im obigem erstern Falle besteht die Zahlgröße aus 2, im zweiten aus 8, im dritten aus 20, und im vierten aus 100 gleichen Theilen. Hierbei zeigen die Zahlen 1. 6. 20. 60. nur an, wie viele Theile einer solchen gleichartig getheilten Größe vorhanden sind, und daher nennen wir sie im Gegensatze der ganzen Zahlen mit Recht Theilzahlen.

Anm. Letztere Benennung glaubten wir der bisherigen Benennnng Brüche vorziehen und zur allgemeinen Einführung empfehlen zu müssen, theils weil jene so verständlich und anpassend ist, theils weil wir es für unschicklich finden, ein Wort in Schulen zu gebrauchen, welches zur Bezeichnung eines Leibesschadens verwendet wird, von dem man nicht gern öffentlich spricht. Wollen wir daher künftig die Brüche nur allein den Chirurgen zur Behandlung

lung überlassen, und uns als Pädagogen in Schulen bloß mit Theilzahlen beschäftigen.

§. 15.
Von ungenannten und genannten Zahlen.

Die Zahlen werden auch noch in ungenannte und genannte eingetheilt. Ungenannt nennt man sie, wenn sie sich auf keinen andern Gegenstand beziehen, sondern als ein Gegenstand an sich, als Größen betrachtet werden, die aus Einheiten bestehen, wie z. B. 6. 8. 20. 100. Genannte Zahlen heißen sie, wenn dabei Gegenstände genannt werden, z. B. 6 Aepfel, 8 Ellen, 20 Eimer, 100 fl.

Dieser Unterschied ist für die Methode von höchster Wichtigkeit. Bei den ersten nähmlich ist der Geist nur allein mit den Zahlgrößen an und für sich (oder mit reinen Anschauungen) beschäftiget, und hat daher einen Stoff vor sich, der sich um so mehr zu Denkübungen eignet, als ihm nichts fremdartiges beigemischt ist. Deßwegen sind die Rechenübungen zuerst mit diesem reinen Stoffe anzustellen, später mit den Symbolen der Zahlen, den Ziffern, und zuletzt mit genannten Zahlen, wie sie im bürgerlichen Leben vorkommen. Wer es umkehrt, und mit letztern anfangen läßt, wie so viele zu thun pflegen, ehe noch der Geist der Schüler sich die Zahlenwelt unterthänig gemacht und zu reiner Auffassung jeder Zahlengröße gewöhnt hat, der wird nie vorzügliche Rechner bilden.

Anm. Damit wird keineswegs behauptet, daß nicht zuweilen auch Beispiele aus der sinnlichen Welt eingemischt werden dürfen, sondern nur die Ordnung des Rechenunterrichts im allgemeinen bezeichnet. Auch wird selbst in der Folge darauf gedrungen, bei den ersten Rechenübungen die Finger zu Hülfe zu nehmen, jedoch nur in so lange, bis hierdurch die reinen Begriffe von Zahlgrößen erzeugt sind. Ist letzteres erreicht, so muß der jugendliche Geist mit allem Fleiße angehalten werden, sich nur mit Zahlen als dem reinsten Denkstoffe zu beschäftigen.

Erster Cursus
des
Denkrechnens
oder
die Zahlenrechenkunst.

Erster Cursus des Denkrechnens, oder die Zahlenrechenkunst.

I. Grundübungen.

A. Numeriren oder das Zahlordnen.

§. 16.

Vorbemerkung.

Das Grundelement, woraus alle Zahlgrößen bestehen, ist die Zahl Eins. Bloß durch Hinzufügung dieses Elementes zu sich selbst entsteht die Zahl zwei; und durch weitere Wiederhohlung dieser Operation immer wieder eine neue Zahl, und dieß so ins Unendliche fort.

Um aber diese unendliche Menge möglicher Zahlen übersehen und handhaben zu können, müssen wir sie zu gleicher Zeit in eine genau abgemessene Ordnung oder in ein System bringen.

Dieses Zahlensystem muß von den Schülern selbst geschaffen werden, theils weil es überhaupt höchster

Zweck

Zweck des Rechenunterrichts ist, ihre Selbstkraft in Anspruch zu nehmen, theils weil sie ohne diese Grundbildung nie eine volle und sichere Gewandtheit in der Rechenkunst erlangen können.

Man nimmt hierbei die Finger zu Hülfe, theils weil der Begriff von reiner Zahlengröße erst an sinnlichen Gegenständen durch das successive (aufeinander folgende) Auffassen derselben zum Bewußtseyn zu bringen ist, theils weil unsere Finger die Grundlage zu dem bei uns eingeführten Dezimalsysteme (Zehnersysteme) bilden.

Anm. Hätten wir 12 Finger an beiden Händen, so würden wir ohne Zweifel das Zwölfer oder Taunsystem erhalten haben, so wie die Zahl von 8 Fingern Veranlassung zu einem andern System gegeben haben würde, wobei man Acht (wie jetzt die Zehn) zum Elemente der zweiten Zahlenordnung erhoben hätte. Zwanzig würde man alsdann 24, Vier und zwanzig 30, Sieben und Vierzig 57 geschrieben haben. — Auf gleiche Weise läßt sich ein Vierersystem bilden, zu welchem man nur die ersten drei Ziffern nebst der Null nöthig haben würde.

§. 17.

Erbauung des Dezimalsystems.

Die neun ersten! Größen, welche durch das wiederhohlte Hinzuthun der Eins entstehen, bilden mit dem Grundelemente, der Eins selbst, die erste Ordnung der

Zah-

Zahlen, welche man Einer nennt, weil diese Zehn ersten Zahlgrößen wirklich aus lauter Einern oder Einheiten bestehen.

Die aus zehn Einheiten bestehende Zahl wird wieder zum Elemente der zweiten Zahlenordnung benutzet, um durch Hinzufügen derselben zu sich selbst wieder zehn neue Zahlengrößen zu bilden, welche ihrer Bestandtheile wegen Zehner genannt werden.

Zehn Zehner bilden das Element zur dritten Zahlordnung, welche mit seinem Elemente wieder nur zehn Zahlgrößen, wie die beiden ersten Ordnungen, enthält, die aus gleichem Grunde wieder Hunderte genannt werden.

Aus Zehnhundert wird als einem neuen Elemente die vierte Ordnung von zehn Zahlen gebildet, welche Tausende heißen.

Durch diese vier Ordnungen ist man im Stande, das Zahlensystem weiter bis zu Tausend mahl Tausend oder einer Million zu steigern, was für den ersten Cursus des Rechenunterrichts schon mehr als genug ist.

Anm. 1. Beim zweiten Cursus, der Zifferrechenkunst kann man die Schüler mit dem weitern Baue des Zahlensystems bekannt machen; und selbst beim Anfange des ersten Cursus wird man wohl thun, sie zu allererst nur mit den vier Ordnungen bekannt zu machen, und die folgenden drei bis zu spätern Uebungen versparen.

2. Tillich (der zu früh Entschlafene!!) hat durch die Endigung der Zehnernahmen (zwanzig, vierzig rc.)

zig ꝛc.) verleitet, den Nahmen Zehner durch die Einführung des neuen Wortes Zig (z. B. zwei Zig, drei Zig ꝛc.) verdrängen wollen. Aber bei unserer bildenden Methode wird man finden, daß dieß neue Wort ganz unnöthig sey, und das Wort Zehner bei seiner alten Würde gelassen werden könne.

§. 18.

Methodisches Verfahren bei Erbauung der ersten Zahlen-Ordnung.

Zuerst lernen die Schüler die erste Zahlenordnung durch Hülfe ihrer zehn Finger bilden, wobei folgendes von den Lehrern beobachtet werden muß:

1. Damit sich bei jenen der Begriff von Entstehung jeder weiter folgenden Zahl durch Hinzufügen des Urelementes, der Eins, richtig entwickle, dürfen sie die Finger nicht auf die bisher gewöhnliche Weise zählen lernen, indem sie mit dem Zeigefinger von Finger zu Finger forthüpfen, und dabei die Zahlen 1. 2. 3. ꝛc. aussprechen, weil 1 Finger immer nur 1 Finger bleibt, und nicht 2. 3. ꝛc. heißen kann, wenn er auch in der Fingerreihe an der Hand den zweiten oder dritten Platz einnimmt; sondern sie müssen zu dem ersten Finger den zweiten hinzufügen, und dann erst die durch Vereinigung dieser zwei Einheiten entstandene neue Größe Zwei nennen. Auf gleiche Weise legen sie zu diesen 2 zu einem Ganzen verbundenen Fingern den dritten Finger hinzu, um wieder da-

dadurch eine neue Größe zu bilden, die man drei nennt. Auf diese Art muß bis zu 10 aufs sorgfältigste fortgefahren werden, wenn der alte Mechanismus von den Schülern gleich anfänglich entfernt gehalten werden, und diese Uebung nicht in ein bloßes Gedächtnißwerk ausarten soll, wobei der Geist nichts denket. Auf die oben angegebene Weise bildet sich aber allmählich die Vorstellung, daß jede Zahlengröße aus einer gewissen vereinigten Menge von Einheiten besteht.

2. Sind die Schüler von Haus aus noch im Zählen ganz unerfahren, so thut man wohl, wenn man sie anfänglich die Zahlen nur bis 3 oder 5 erbauen läßt, und erst nach genugsamer Einübung dieser Abtheilung mit dem weitern Baue bis zur Vollendung der ersten Ordnung fortschreitet.

3. Mit der Konstruktion oder dem Erbauen der ersten Zahlenordnung durch fortgesetzte Hinzufügung eines Fingers muß zugleich die regelmäßige Destruktion oder das Zerlegen derselben durch allmählige Wegnahme eines Fingers verbunden werden, um bei den Schülern nicht nur die Vorstellung zu wecken, daß jede Größe durch Wegnahme einer Einheit gleichfalls wieder zu einer andern verschiedenen Größe gemacht wird, sondern ihnen auch die Aufeinanderfolge der Zahlen erster Ordnung vor- und rückwärts recht geläufig zu machen.

4. Ist dieses Bilden und Zerlegen der 10 Zahlen erster Ordnung genugsam an den Fingern eingeübt worden, so wird nun dasselbe zulezt noch ohne Finger

wiederhohlt, damit die Schüler dadurch veranlaßt werden, die Zahlen sich auch rein, ohne Zuthat (einer empirischen Anschauung) zu denken.

5. Um ihnen auf dieser Stufe auch noch den Begriff von Einer zu deutlichem Bewußtseyn zu bringen, zeige der Lehrer ihnen 1. Finger und frage: wie viel sind das Finger? Schüler: Einer. Lehrer (zeigt ihnen 2 Finger und spricht): wie viel Einer sind das? (Antworten die Schüler bloß „zwei" so nöthiget man sie, jedes Mahl so zu antworten, wie man sie fragt, und folglich zwei Einer zu sagen. Auf gleiche Weise fährt man bis zu 10 fort, und so dann wieder rückwärts bis zu 0, indem man keinen Finger in die Höhe streckt, und gleichwohl fragt, wie viele Finger in die Höhe stehen, um die Antwort „Keiner" (nicht Einer) zu erhalten.

Anm. 1.) Was bei diesen Uebungen vorzüglich angeregt wird, ist die verbindende und die trennende (synthetische und analytische) Denkkraft. Wer dabei den höhern Zweck, die Geistesbildung, erreichen will, muß daher recht genau darauf sehen, daß diese Geisteskraft hierbei vorzüglich entfaltet werde. Die gewonnene Zahlenfertigkeiten müssen der Ausweis hiervon seyn.

2.) Läßt man die Schüler nach der alten Art die Finger zählen, so bringt man ihnen selbst falsche Begriffe oder leere Worte bei, weil z. B. der zweite Finger an der Hand nur Einer ist, und daher für sich allein nie Zwei heißen kann.

§. 19.

§. 19.

Methodisches Verfahren bei Erbauung der zweiten Zahlenordnung.

Haben die Schüler diese erste Stufe des Numerirens erstiegen, so werden sie hierauf angehalten, auf gleiche Weise die zweite Zahlenordnung selbstthätig zu bilden, nicht aber, wie bisher auf eine höchst fehlerhafte Weise geschah, von 10 sogleich mit 11. 12. 13 bis auf 20 oder 100 fortzufahren. Denn von dem Verbinden zweier und mehrerer Zahlenordnungen können sie so lange noch keinen Begriff haben, bis sie zu diesem durch Erbauung jener gelangt sind. Auch hier spricht sich der Geist der alten mechanischen Lehrweise dahin aus, daß die Lehrer nicht wußten, was dabei eigentlich zu thun sey!

Nach der bildenden Methode wird hierbei auf folgende Weise verfahren:

1. Man ruft einen Schüler auf, seine sämmtlichen Finger zu einem Ganzen zusammen zu fügen, und hierauf zu sagen, wie viel dieß Finger seyen.

2. Man fordert einen zweiten Schüler auf, seine 10 Finger eben so zu einem Ganzen zusammenzufügen, sie neben den 10 Fingern des erstern Schülers zu legen, und nun zu sagen, wie viel die beiden Hände Paare Zehner seyen.

3. Auf gleiche Weise fährt man steigend bis zu 10 Zehnern fort, und läßt dann ein Händepaar nach dem andern wieder von der Tafel wegnehmen, und dabei an-

angeben, wie viel Zehner noch auf derselben liegen geblieben sind.

4. Erst wenn sich durch diese Uebung der Begriff von den Bestandtheilen der zweiten Zahlenordnung, den Zehnern, gehörig gebildet hat, wiederhohlt man sie, indem man seinem Schüler zugleich dabei bekannt macht, daß man zwei zehner, zwanzig, drei zehner, dreisig ꝛc. nenne. Der Lehrer spricht dem zu Folge: laßt uns diese Uebung noch ein Mahl vornehmen. Legt also ein Paar Hände oder zehn Finger auf die Tafel. Wie viel Zehner sind das? (1 Zehner) Lege ein anderer auch noch 10 Finger hinzu. Wie viele Zehner sind es jezt? (2 Zehner) Im gemeinen Leben sagt man aber zwanzig. Wie viel sind also 10 und 10 zusammen genommen? Zwei Zehner oder 20. u. s. w.

5. Zulezt wird ohne Finger die zweite Zahlordnung sowohl vorwärts (10 + 10 = 20 + 10 = 30 + 10 = 40 + 10 = 50 + 10 = 60 + 10 = 70 + 10 = 80 + 10 = 90 + 10 = 100) als auch rückwärts (100. 90. 80. 70 u. s. w.) nochmals durchgegangen, um den Schülern auch die Reihenfolge der Zahlen dieser Ordnung auf beiderlei Weise recht geläufig zu machen.

§. 20.

Methodisches Verfahren bei Erbauung der dritten und vierten Zahlenordnung.

Auf gleiche selbstthätige Weise werden die Schüler angehalten, das Hundert als Element zur

Bil-

Bildung der zehn Zahlen zu gebrauchen, welche die dritte Zahlenordnung ausmachen, und eben so fertig die Zahlenreihe von 1 bis 10 Hundert oder Tausend vor- und rückwärts anzugeben. Wo zahlreiche Schulen sind, kann gar füglich als Hülfsmittel, um ihnen den Begriff vom Hundert recht anschaulich zu machen, die Anordnung getroffen werden, die Schüler je 10 auf einer Bank zu vertheilen.

Die vierte Zahlenordnung, die Tausende, dürfen eigentlich nur von Ein bis zehn Tausend erbauet werden, doch steht es dem Lehrer frei, diese Zahlenschöpfung in gleicher Ordnung bis 20. 30. 100 tausend, ja bis 200 und 10,00 Tausend (Tausend mahl Tausend) zu steigern, da der jugendliche Geist, wenn er bei Aeusserung seiner bisherigen Selbstthätigkeit in Erbauung des Dezimal Systems richtig geleitet worden ist, keine Schwierigkeit mehr findet, nach gleicher Regel in seinem Zahlenbaue fortzufahren.

Anm. Wir können nicht umhin, hierbei die Lehrer zu bitten, auf die Wirkung aufmerksam zu seyn, welche dieser bildende Unterricht bei ihren Schülern hervorbringen wird. Das Bewußtseyn ihrer selbstthätigen Kraftäusserung wird ihnen die angenehmste Unterhaltung gewähren, und sie werden die Entfaltung einer Kraft zeigen, welche die Lehrer selbst oft in Erstaunen setzen wird.

§. 21.

§. 21.
Methodisches Verfahren bei Verbindung der vier ersten Zahlenordnungen.

Jezt erst, nachdem die Schüler von den vier ersten Zahlenordnungen durch das selbstthätige Hervorbringen derselben sich einen anschaulichen Begriff erworben haben, zeigt man ihnen, wie sie solche mit einander verbinden können, indem man sie auffordert, in ununterbrochener Reihe von Eins bis Tausend fortzuzählen. Jezt kommen folglich erst die Zahlen 1 und 10 oder Eilf, 2 und 10 oder Zwölf, 3 und 10 oder Dreizehn ꝛc. 1 und 20 oder 21, 2 und 20 oder 22 ꝛc. zum Vorschein, und die Schüler werden inne, welche Menge von Zahlen sie aufs neue durch diese Verbindung hervorbringen.

Dieses Zählen von 1 bis 1000 kann zum Theil von allen Schülern zusammen vorgenommen, zum Theil unter ihnen so vertheilt werden, daß jeder der Reihe nach zehn Zahlen hernennt, und der Nachbar mit Zählung der nächsten 10 Zahlen fortfährt.

Bei dem rückwärts vorzunehmenden Zählen ist es nicht nöthig, die Zeit damit zu verschwenden, solches lückenlos vornehmen zu lassen. Es reicht schon hin, von 1000 bis auf 897 und von 100 bis 1 zurück zählen zu lassen, und die dazwischen liegenden Zahlen zu überspringen, da man den Schülern zutrauen kann, daß die Sache für sie keine Schwierigkeit mehr hat. Nur rathen wir, dieses zurückgehende Zählen von 100 anfan-

fangen zu lassen, und dann erst 1000 als das höhere Anfangsziel anzugeben.

Anm. Jezt wird es allen klar einleuchten, wie verkehrt man verfuhr, wenn man seine Schüler früher zählen ließ, ehe sie das Numeriren oder Ordnen der Zahlen vorgenommen und begriffen hatten. Denn Zählen setzt schon Kenntniß des Zahlensystems voraus, wovon jenes nur eine Anwendung ist.

§. 22.

Kenntniß der geraden und ungeraden Zahlen.

Da die Kenntniß der geraden und ungeraden Zahlen für die Rechenkunst so wichtig ist, so werden die Schüler sehr zweckmäßig noch zulezt im Ordnen dieser Zahlen geübt. Hierbei ist folgendes zu beobachten:
1. Zuerst hat man ihnen einen deutlichen Begriff von dem beizubringen, was man eine gerade und ungerade Zahl nennt. Dieß wird am besten dadurch bewerkstelliget, daß man ihnen zwei Finger vorhält, und sie fragt, ob man diese wohl in zwei gleiche Hälften theilen könne? Da schwerlich der Neuheit der Frage wegen eine Antwort erfolgen wird, so spricht der Lehrer, indem er z. B. ein Linial zwischen beide Finger legt: nun habe ich die zwei Finger in zwei Theile getheilt. Seht nun her, ob jeder Theil so groß wie der andere ist? Auf dieser Seite sind wie viele Finger? (Einer) Und auf der andern? (auch einer) Sind also die beiden Hälften einander gleich oder ungleich? (Sie sind einander gleich)

Wenn

Wenn eine Zahl in zwei gleich große Hälften getheilt werden kann, so heißt man sie eine gerade Zahl, im Gegentheile eine ungerade. Was ist folglich Zwei für eine Zahl? (Eine gerade) Warum? (weil sie in zwei Hälften getheilt werden kann, wovon die eine so groß ist, wie die andere) Laßt uns sehen, ob Drei eine gerade oder ungerade Zahl sey. Ich schiebe jezt das Linial zwischen den ersten und zweiten (oder zweiten und dritten) Finger, und theile sie dadurch in zwei Hälften. Auf der einen Seite sind wie viele Finger? Auf der andern? Ist Drei eine gerade oder ungerade? Warum eine ungerade? Was nennt man eine gerade Zahl?

2. Nach dieser Vorübung und Begriffserläuterung fordert man die Schüler auf, alle geraden Zahlen in auf und absteigender Linie von 2 bis 10 (2. 4. 6. 8. 10. 10. 8. 6. 4. 2.) und dann alle ungeraden Zahlen der ersten Ordnung auf gleiche Weise (1. 3. 5. 7. 9. 9. 7. 5. 3. 1.) anzugeben

3. dieselbe Uebung wird hierauf auch mit den Zehnern und Hunderten, und zulezt mit den verbundenen beiden ersten Ordnungen von 2 bis 100, und 1 bis 99 vor — und so auch wieder rückwärts von 100 bis 2 und von 99 bis 1 vorgenommen.

4. Wer seinen Schülern noch eine weitere Freude bereiten will, leitet sie auch noch auf die eigene Bemerkung, daß zwei gerade Zahlen miteinander verbunden wieder eine gerade Zahl bilden, die ungeraden aber sich in gerade verwandeln.

Anm.

Anm. Lehrer, welche den ersten Rechenkursus in einem Jahre zu vollenden gedenken, dürfen auf das Numeriren nicht mehr als vier bis sechs Wochen verwenden. Ueberhaupt ist es rathsam, sich ein Zeitschema für alle Abtheilungen dieses Cursus zu entwerfen, um weder bei der einen noch bei der andern länger zu verweilen, als es nöthig ist.

B. Ponderiren
oder
Zahlenmessen.

§. 23.
Vorbemerkung.

Bei dem Ponderiren hat man zur Absicht, die Schüler dahin zu bringen, daß sie sich bei jeder Zahl der Menge von Einheiten bewußt werden, die in derselben enthalten sind. Um zu diesem Zwecke zu gelangen, müssen die Schüler zuerst aufs neue die Zahlen zusammensetzen, wie bei dem Numeriren geschah. Da sie dieß aber nicht mit hinreichender Reflektion, auf ihr eigenes Thun und Schaffen vorzunehmen pflegen, so werden sie zweitens dabei zu gleich angehalten, die Zahlen augenblicklich wieder zu zerlegen, und folglich mit klarem und vollem Bewußtseyn aufzufassen, aus welchen Theilen diese eigenen Produkte ihres Schaffungsvermögens bestehen.

Man

Man nimmt, wie hieraus deutlich erhellt, zwei Handlungsvermögen des Gemüthes zugleich im Anspruch, nähmlich das bindende (synthetische) und das trennende oder auflösende (analytische.) Durch beide gelangen die Schüler zu der Fertigkeit, jede Zahlengröße alsbald zu ermessen, oder sich von ihr einen deutlichen Begriff zu bilden. Der Nahme der Zahlen bleibt ihnen kein bloßer, dem Ohre nur bekannt gewordener Schall, bei dem sie sich nach der alten mechanischen Methode bloß einer Ziffer, eines gleichbedeutenden Zeichens, erinnerten, sondern mit dem Nahmen, z. B. der Zahl drei, steht vor ihnen auch, was sie in sich begreift nähmlich 1 + 1 + 1 oder 2 + 1.

Dieses Zerlegen der Zahlen in ihre Bestandtheile darf aber nicht, mit Ausnahme der beiden geringsten, (der zwei und drei) bis auf die Einheiten zurückgehen. Dieß wäre nicht nur eine große Zeitverschwendung, sondern brächte auch dem Besthaltungs-Vermögen des jugendlichen Gemüthes großen Nachtheil. Denkt sich der Schüler einmahl unter zwei die aus 1 + 1, und unter drei die aus 1 + 1 + 1 zusammengesezte Größe bestimmt deutlich, so habe ich nicht nöthig, ihn solche weiter zerlegen zu lassen. Denkt er sich unter fünf die aus 2 und 3 zusammengesetzte Größe, so faßt er auch die Menge aller in ihr enthaltenen Einheiten auf, weil er sich unter zwei, die aus zwei, und unter drei, die aus drei Einheiten bestehende Zahlgröße denkt. Man zerstöre daher dieses Aufbauungs und Auffassungsvermögen nicht durch ein zweckwidriges Zerlegen bis auf das Urelement, die

Ein-

Einheit. Dieselbe Bemerkung gilt von den aus mehreren Ordnungen zusammengesetzten Zahlen, z. B. 12 oder 123. Weiß der Schüler, daß die erstere aus zehn und 2, die leztern aus Ein hundert, zwanzig und drei besteht, so weiß er auch, daß jene aus 10 und 2 Einheiten, und diese aus 10 und 2 Zehnern und drei Einheiten besteht. Eben dazu hat der Mensch dieses Vermögen des Ordnens oder Aufbauens erhalten, um das Regiment seiner Gedanken zu erleichtern und zu verstärken. Man handelt unpädagogisch, wenn man ihn hierbei störet, anstatt ihn anzuhalten, sich dieser Stützpunkte seiner Kraft mit Vortheil zu bedienen.

Der Stufengang beim Ponderiren schließt sich übrigens genau an jenen an, der bei dem Numeriren beobachtet wurde. Zuerst müssen die Schüler die Zahlen der ersten Ordnung genau und fertig ponderiren lernen, dann dieselben Uebungen mit den Zahlen der zweiten, dritten und vierten Ordnung wiederholen. In Rücksicht der Zahlen, welche aus verschiedenen Ordnungen bestehen, findet aber deßhalb keine besondere Uebung statt, weil die Größe jeder Zahl von dem Schüler bereits erfaßt ist, und er sie nur in die Ordnungen zerlegen darf, in welche solche zusammengesetzte Zahlen gehören.

§. 24.

Methodisches Verfahren bei dem Ponderiren a. der ersten Zahlgröße zwei.

Auch bei dem Ponderiren werden die Finger wieder abwechselnd zu Hülfe genommen, und dabei anfänglich auf folgende Weise verfahren.

1) Füge vor den Augen deiner Schüler Einen Finger zu dem Andern und sprich dabei: Eins und Eins ist — wie viel? — die Antwort, zwei, wird schnell erfolgen, weil sie dieses schon wissen.

2) Nun wende man aber die Frage um, um sie zu nöthigen, was so eben von ihnen zu Einer Größe *verbunden* wurde, wieder in seine Bestandtheile zu *zerlegen*, und sprich: wie viel ist zwei? In demselben Augenblicke, als du dieses sagst, ist es jedoch durchaus nothwendig, daß du die beiden zu Einer Größe vereinigten Finger auseinander legst, *damit deine Schüler auf gleiche Weise auch in ihrem Kopfe die Zahl Zwei in die beiden Einheiten zerlegen*, und hierauf mit anschaulicher Gewißheit antworten: Eins und Eins. Sollte sich zuweilen ein Kind darunter finden, welches an das mechanische Zählen im älterlichen Hause schon gewöhnt, die unrichtige Antwort gibt, Eins und Zwei, indem es numeriren zu müssen glaubt: so frage man dasselbe, ob denn nicht jeder Finger nur 1 Finger sey, oder ob der zweite Finger aus zwei Fingern bestehe. Bei der Wiederholung wird kein Irrthum mehr obwalten, sondern alle Kinder antworten: Zwei ist Eins und Eins; und sich folglich unter *zwei* die *Zahlengröße* denken, *welche aus Eins und Eins besteht*. Selbst der größte Mathematiker kann sich keinen deutlichern Begriff von dieser Zahl bilden, als unsere kleinen Schüler nunmehr von ihr gewonnen haben. Damit ist zugleich das sich*ere Fundament* zu allen weitern Uebungen des Ponderirens und der ganzen Rechenkunst gewonnen.

Anm. Was der Lehrer mit seinen Fingern vorgemacht hat, muß von den sämtlichen Schülern zuerst an ihren eigenen Fingern wiederholt, und zulezt von ihnen ohne Finger, bloß im Kopfe vorgenommen werden, indem sie bei dieser Operation sprechen: 1 und 1 ist 2 und zwei ist 1 und 1. Dieselbe Bemerkung gilt auch für alle nachfolgende Aufgaben des Ponderirens.

§. 25.

b. Der Zahlen Drei und Vier.

Bei der Zahl 3 zeigt der Lehrer seine 2 vereinigten Finger und spricht, indem er einen dritten Finger hinzufügt: dieß sind 2 Finger; nun lege ich noch einen hinzu, wie viel sind es jezt? (3 Finger) Also 2 und 1 ist? Haben die Schüler geantwortet 3, so kehre man die Sache wieder um und frage: wie viel ist 3, während man man die drei vereinigten Finger abermahls vor ihren Augen in die zwei Größen 2 und 1 zerlegt, um sie dadurch zu veranlassen, dieselbe Operation im Innern ihres Geistes vorzunehmen. An sich ist es zwar nicht nöthig, diese Zahl in ihre drei Bestandtheile zerlegen zu lassen, weil die Schüler sich unter 2 schon 1 und 1 denken. Jedoch unterlasse man nicht, wenn obige Uebung von den Schülern an ihren Fingern, und zulezt ohne diese wiederholungsweise vorgenommen wird, sie anfänglich in 2 und dann in 3 Bestandtheile zerlegen zu lassen, und sich hierdurch zu versichern, daß sie den Begriff von der

Zahl-

Zahlgröße drei (der in ihr enthaltenen Menge von Einheiten) so deutlich aufgefaßt haben, daß sie ihn nicht mehr aus dem Bewußtseyn verliehren können.;

Bei der Zahl 4 legt man zu 3 Fingern noch einen und sagt: 3 und 1 ist? — Und dann wieder: wie viel ist 4? Bei der hierauf erfolgenden Antwort „3 und 1" bleibe man aber nicht stehen, sondern spreche weiter: „wenn ich aber von diesen 3 Fingern den einen wegnehme und ihn zu dem 1 schon weggenommenen Finger lege, dann haben wir die Zahl 4 in zwei andere Zahlen, nähmlich in 2 und 2 zerlegt. Zerlegen wir eine von diesen leztern wieder in 1 und 1, so zerfällt die Zahl 4 in 3 Bestandtheile. Wiederholt dieß nun an den Fingern eurer eignen Hand: 2 Finger und 2 Finger zusammen sind 4; und 4 ist 3 und 1 oder 2+2; oder in 3 Zahlen zerlegt, 2 und 1 und 1." Dieselbe Uebung lasse man aus dem Kopfe wiederholen, oder gebe seinen Schülern auf, die Anzahl der Füße des vor ihnen stehenden Tisches oder Stuhles anzugeben, ohne das Wort Vier auszusprechen. Der eine Schüler wird sagen: 2 und 2; der andere: 3 und 1; der dritte 2 und 1 und 1.

Anm. Als Regel muß dabei aufgestellt werden, daß immer die größere Zahl zuerst ins Auge gefaßt, und mithin die größere vor der kleinern genannt werden muß. Man muß daher stets sprechen: 4 ist 3 und 1; und nicht: 4 ist 1 und 3.

§. 26.

c. Der übrigen Zahlen der ersten Ordnung.

Auf gleiche gründliche Weise wird auch das Ponderiren mit den übrigen Zahlen der ersten Ordnung von 5 bis 10 vorgenommen, wobei folgendes zu beobachten ist:

a) Bei Zerlegung gehe man nur auf 3 Zahlen und nicht weiter zurück, um alle unnöthige und zeitraubende Operationen zu vermeiden. Wer das Schwerere aufgefaßt hat, hat damit das Leichtere zugleich mit begriffen; wem z. B. es zur Fertigkeit geworden ist, sich in der Zahl 7 die Bestandtheile 3. 2. 2 zu denken, der weiß, daß auch durch bloße weitere Zerlegung eines dieser drei Bestandtheile 4 Zahlen, z. B. 2+2+2+1 gebildet werden können.

b. Die Zerlegung in den Urbestandtheil in Eins, z. B. 6 ist 5 und 1, ist gleichfalls als unnöthig und zeitraubend zu vermeiden, weil allen Schülern schon durch die bisherigen Uebungen geläufig geworden ist, jede Zahl um 1. größer als die in der Ordnungsreihe vorhergehende zu denken, z. B. 9=8+1.

c. Zuerst ist jede Zahl nur in zwei Bestandtheile zu zerlegen, und wenn diese Operation genugsam eingeübt ist, dann gehe man zur Zerlegung in drei Bestandtheile fort.

d. Zuletzt wird die ganze Uebung mit den sämmtlichen Zahlen der ersten Ordnung auf folgende Weise wiederholt.

1. Zerlegung der Zahlen in 2 Bestandtheile.

Der

Der Lehrer: 1 und 1 ist? (die Schüler:) 2. Der Lehrer: 2 ist? (der Schüler:) 1 und 1. ꝛc. Oder bloß mit Zahlen und Zeichen ausgedrückt:

$1+1=2$ und $2=1+1$
$2+1=3$ — $3=2+1$
$2+2=4$ — $4=2+2$
$3+2=5$ — $5=3+2$
$3+3=6$ — $6=3+3$
$4+2=6$ — $6=4+2$
$4+3=7$ — $7=4+3$
$5+2=7$ — $7=5+2$
$4+4=8$ — $8=4+4$
$5+3=8$ — $8=5+3$
$6+2=8$ — $8=6+2$
$5+4=9$ — $9=5+4$
$6+3=9$ — $9=6+3$
$7+2=9$ — $9=7+2$
$5+5=10$ — $10=5+5$
$6+4=10$ — $10=6+4$
$7+3=10$ — $10=7+3$
$8+2=10$ — $10=8+2$

2. Zerlegung in 3 Bestandtheile.

$1+1+1=3$ und $3=1+1+1$
$2+1+1=4$ — $4=2+1+1$
$2+2+1=5$ — $5=2+2+1$
$2+2+2=6$ — $6=2+2+2$
$3+2+1=6$ — $6=3+2+1$
$3+2+2=7$ — $7=3+2+2$
$4+2+1=7$ — $7=4+2+1$

$3+3+2=8$ — $8=3+3+2$
$4+2+2=8$ — $8=4+2+2$
$4+3+1=8$ — $8=4+3+1$
$5+2+1=8$ — $8=5+2+1$
$3+3+3=9$ — $9=3+3+3$
$4+3+2=9$ — $9=4+3+2$
$5+2+2=9$ — $9=5+2+2$
$5+3+1=9$ — $9=5+3+1$
$6+2+1=9$ — $9=6+2+1$
$3+3+4=10$ — $10=3+3+4$
$4+4+2=10$ — $10=4+4+2$
$5+3+2=10$ — $10=5+3+2$
$5+4+1=10$ — $10=5+4+1$
$6+2+2=10$ — $10=6+2+2$
$6+3+1=10$ — $10=6+3+1$
$7+2+1=10$ — $10=7+2+1$

Anm. Da alles darauf ankommt, daß die Schüler diese Zahlen der ersten Ordnung recht ermessen lernen, indem das Ponderiren der Zahlen der höhern Ordnung nur eine Wiederholung derselben Operation ist: so schreite man nicht eher zu einer weitern Uebung fort, als bis jene Absicht aufs Vollständigste erreicht ist. Um sich davon zu überzeugen, stelle man zuletzt noch eine Prüfung an, indem man bald zu diesem, bald zu jenem Schüler sagt: die Mutter schenkte dir einmahl 4 (oder 7 oder 9) Kreuzer (oder Haselnüsse ꝛc.). Sage dieß deinem Nachbar, aber ohne die Zahl 4 zu gebrauchen, und ohne dich unrichtig auszudrücken, denn sonst hat dein Nachbar

das Recht, deinen Fehler zu verbessern. Sage es noch anders mit 2 Zahlen; noch anders mit 3 Zahlen. — Andere Beispiele sind: wie viele Kinder sitzen auf dieser Bank; wie viele Finger hast du an deinen beiden Händen; wie viele Fensterscheiben hat jenes Fenster; wie viel Jahre bist du alt? rc.

§. 27.

d. Der Zahlen der zweiten Ordnung.

Von der ersten Stufe des Ponderirens mit Zahlen der ersten Ordnung oder mit Einern geht es zu den Zahlen der zweiten Ordnung oder den Zehnern fort. Diese Uebung hat keine Schwierigkeit, weil sie eine bloße Wiederholung ist. Denn z. B. 6 besteht aus 3+3 oder 4+2 oder 2+2+2, mag diese Zahlgröße 6 Sechs Einheiten oder 6 Zehner bezeichnen. Uebrigens werden bei derselben die Finger nun nicht mehr gebraucht, weil der reine Begriff von Zahlgrößen bereits in den Köpfen der Schüler erzeugt ist, und die Menge der in jeder enthaltenen Bestandtheile nicht mehr sinnlich nachgewiesen werden darf. Höchstens können sie hierbei anfänglich bloß genannt werden.

Als Vorübung, um das früher Erlernte wieder aufzufrischen, geht die Prüfung voraus: 1 Zehner und noch 1 Zehner sind? (2 Zehner oder? zwanzig) 2 Zehner oder zwanzig und noch 1 Zehner sind? (3 Zehner oder dreissig) 3 Zehner oder dreißig und noch 1 Zehner sind? (4 Zehner oder Vierzig) 4 Zehner und noch einer dazu sind

sind? (5 Zehner oder Fünfzig) 5 Zehner und noch 1 Zehner sind? (6 Zehner oder Sechzig) 6 Zehner und noch 1 Zehner sind?) 7 Zehner oder Siebenzig) 7 Zehner und 1 Zehner noch dazu sind? (8 Zehner oder 80) 8 Zehner und 1 Zehner sind? (9 Zehner oder 90) 9 Zehner und 1 Zehner sind? (10 Zehner oder 100).

Hierauf folgt das eigentliche Ponderiren dieser 10 Zahlen nach folgender Ordnung:

10 + 10 ist 20 und 20 ist 10 + 10
20 + 10 = 30 — 30 = 20 + 10.
30 + 10 = 40 — 40 = 30 + 10 oder 20 + 20
40 + 10 = 50 — 50 = 40 + 10 — 30 + 20
50 + 10 = 60 — 60 = 50 + 10 — 40 + 20 od. 30 + 30
60 + 10 = 70 — 70 = 60 + 10 — 50 + 20 — 40 + 30
70 + 10 = 80 — 80 = 70 + 10 — 60 + 20 — 50 + 30
40 + 40
80 + 10 = 90 — 90 = 80 + 10 — 70 + 20 — 60 + 30
— 50 + 40
90 + 10 = 100 — 100 = 90 + 10 — 80 + 20 — 70 + 30
— 60 + 40 — 50 + 50

Anm. Es hängt von der Willkühr des Lehrers ab, ob er diese Zahlen sogleich auch in 3 Bestandtheile zerlegen, oder solche noch besonders vornehmen lassen will. In diesem leztern Falle darf er mit dem Zerlegen sogleich auf folgende Weise anfangen:

30 ist 10 + 10 + 10
40 = 20 + 10 + 10
50 = 20 + 20 + 10 oder 30 + 10 + 10
60 = 20 + 20 + 20 — 30 + 20 + 10 oder 40 + 10 + 10

70 = 30 + 20 + 20 — 30 + 30 + 10 — 40 + 20 + 10
— 50 + 10 + 10

80 = 30 + 30 + 20 — 40 + 20 + 20 — 40 + 30 + 10
— 50 + 20 + 10 — 60 + 10 + 10

90 = 30 + 30 + 30 — 40 + 30 + 20 — 40 + 40 + 10
— 50 + 20 + 20 — 50 + 30 + 10
— 60 + 20 + 10 — 70 + 10 + 10

100 = 30 + 30 + 40 — 40 + 40 + 20 — 50 + 30 + 20
— 50 + 40 + 10 — 60 + 20 + 20
— 60 + 30 + 10 — 70 + 20 + 10
— 80 + 10 + 10

§. 28.

e. Der dritten und vierten Ordnung.

Bei dem Ponderiren der Hunderte und der Tausende, ist die Operation des Geistes dieselbe, indem z. B. 3 aus 2 und 1 besteht, es mögen darunter Einer oder Zehner oder Hunderter oder Tausende gedacht werden. Die Uebungen mit diesen beiden Zahlenordnungen können daher keine andere Absicht haben, als die Fertigkeit der Schüler im Zusammensetzen und Zerlegen der Zahlen zum höchsten Grade von Geschwindigkeit und Sicherheit zu steigern, und den Begriff von diesen 10 in jeder Ordnung vorkommenden Zahlgrößen, oder der in ihnen enthaltenen Menge von Einheiten, zur vollendeten, dem Schüler immer zu Gebothe stehenden Klarheit oder Anschauung zu bringen. Das Schema zu diesen Uebungen darf hier nicht abgedruckt werden, weil es kein anderes als das in §. 26. und 27. schon

schon aufgestellte seyn kann, und der Lehrer nur eine oder zwei Nullen weiter daran hängen oder zu den einfachen Zahlen nur das Wort Hundert oder Tausend hinzufügen braucht.

Anm. Weiter als bis zu der vierten Zahlen-Ordnung darf das Ponderiren nicht fortgesetzt zu werden, weil die Schüler bis dahin sich in dieser Kunst eine solche Gewandtheit werden erworben haben, die nichts mehr zu wünschen übrig läßt.

§. 29.

f. Der Zahlen, die aus verschiedenen Ordnungen zusammengesezt sind.

Diejenigen Lehrer, welche das Ponderiren auf dieselbe Weise mit solchen Zahlen fortgesezt haben, die aus verschiedenen Ordnungen zusammengesetzt sind, (wie z. B. 11. 12. 23. 136. 2121.) bewiesen nur damit, daß ihnen der Geist meiner Methode fremd geblieben ist. Ihr Verfahren konnte keine andere Wirkung haben, als die von ihren Schülern über die Zahlenwelt erlangte Kraft des Geistes wieder zu schwächen, indem sie die zur Begründung seiner Herrschaft so zweckmäßig abgestekte Grenze überschritten, und das jugendliche Gemüth durch ein Uebermaß von Zahlenbegriffen wahrhaft verwirrten. — Um diesem Fehler zu entgehen, unterlasse man folglich, das Ponderiren auf die Zahlenreihen der mit einander verbundenen beiden ersten Ordnungen (auf 11, 12, bis 20, 21 und von da weiter bis auf 100) auf die Weise an-

zuwenden, daß man z. B. spricht 11 ist 5+6 oder 4+7 oder 3+8 oder 9+2 oder 10+1; oder 4+4+3 oder 5+4+2 oder 5+3+3 oder 6+3+2 oder 6+4+1 oder 7+2+2 oder 7+3+1 oder 8+2+1 oder 9+1+1. Bei allen aus 2 oder mehreren Ordnungen zusammengesezten Zahlen muß das Ponderiren sich vielmehr genau an das Numeriren oder Zahlenordnen anschliessen. Der menschliche Geist hat die unendliche Menge von Zahlen dadurch seiner Gedankenherrschaft unterthänig gemacht, daß er sie in die regelmäßigste Ordnung brachte. An diese muß er sich als an die Ruhpunkte seiner Obergewalt anhalten, wenn seine weitern Operationen glücklich von statten gehen sollen. 11 kann daher zur Ermessung seiner Größe bloß in 10 und 1; 12 in 10+2; 13 in 10+3; 14 in 10+4; 15 in 10+5; 16 in 10+6; 17 in 10+7; 18 in 10+8; 19 in 10+9; 20 in 10+10 zerlegt werden. Auf dieselbe Weise wird auch mit den folgenden Zahlen fortgefahren. Z. B. 21 ist 20+1; 22=20+2; 33=30+3; 44=40+4; 56=50+6; 87=80+7; 98=90+8; 106=100+6; 117=100+10+7; 123=100+20+3; 746=700+40+6; 2371=2000+300+70+1 u. s. w.

Anm. Man begreift, daß ein lückenloses Fortschreiten von 11 bis 100 und von 101 bis 200 und so weiter bis 1000 eine große Zeitverschwendung seyn würde, ohne den geringsten Nutzen dabei zu gewähren. Für fähige Schüler sind die so eben angegebenen Ponderirungs-Exempel mit gemischten Zahlen schon hinlänglich. Bei weniger Fähigen

higen kann sie der Lehrer noch mit einigen weitern Aufgaben vermehren.

§. 30.
Beweis, daß die Schüler nun auch schon rechnen können.

Wir haben oben behauptet, daß unsere Schüler auch schon rechnen können, so bald sie fertig Ponderiren gelernt haben. Obgleich die Erfahrung jeden davon sattsam überzeugen wird, so dürfte es doch wohl gethan seyn, hiervon einen vorläufigen Beweis abzulegen, um die Lehrer um so gewisser für die gründliche Betreibung des Ponderirens zu gewinnen. Es sey die Zahl 6 welche durch verschiedene Rechnungsarten gefunden werden müßte. Man lege daher jezt unsern Schülern aus der Addition die Aufgabe vor: die Zahl zu finden, welche so viele Einheiten enthält als die Zahlen 4 und 2, und sie werden nicht erst hierüber ihr Gedächtniß zu Hülfe nehmen, sondern es wird vor ihnen mit anschaulicher Gewißheit stehen, daß 6 die gesuchte Zahl sey, weil sie 4 und 2 in sich begreift. Aus der Multiplikation sollen sie die Frage lösen, welches die Zahl sey, die so viele Einheiten enthält als 2, wenn diese Zahl 3 Mahl mit sich selbst verbunden wird. Mit der Frage wird schon vor ihrem Geistes-Blicke sich die Zahl 6 darstellen, weil diese 2+2+2 in sich begreift. Aus der Subtrakzion lege man ihnen die Aufgabe vor: welche Zahl so viel Einheiten enthalte als 6, wenn leztere Zahl um 2 vermindert

dert würde; und schnell werden sie antworten 4, weil 6 — 2 = 4. Aus der Division laute die Aufgabe: welche Zahl gibt an, wie oft 12 um 2 vermindert werden könne. Sie wissen schon vor dieser Frage, daß in 10 die Zahl 2 fünf Mahl, folglich in 10 + 2 sechs Mahl enthalten sey, und werden daher die Antwort keinen Augenblick schuldig bleiben. Selbst bei der Regel De-tri werden sie jede Aufgabe lösen, so bald sie nur einmahl aufgefaßt haben, daß man hier von dem Verhältnisse des einen Zahlen-Paares auf das andere schließt, und daher sagen müsse, so viel größer oder kleiner die zweite Zahl im ersten Paare gegen die erstere ist, so viel größer oder kleiner muß auch die noch unbekannte vierte Zahl gegen die dritte seyn. Wenn also z. B. 2 Aepfel 4 kr. kosten (die zweite Zahl noch ein Mahl so groß als die erstere ist) so müsseu 3 Aepfel (auch noch ein Mahl so viel, folglich) 6 Kreuzer kosten. — Selbst in letzterem Beispiele braucht es des mechanischen Verfahrens nicht, das dritte mit dem zweiten Gliede zu multipliziren, und in die Summe das erste Glied zu dividiren; sondern unsere Schüler fassen durch Hülfe des eingeübten Ponderirens mit Einem Geistesblicke auf, wie sich diese Zahlen zu einander verhalten (das heißt, wie viel größer die eine gegen die andere sey,) und welches daher die gesuchte vierte Zahl nothwendig seyn müsse. Noch kürzer als mit Worten stellt sich diese Geistes Operation auf folgende Weise durch Ziffern und Zeichen dar:

$$2 : (\times 2)\ 4 = 3 : (\times 2)\ 6.$$

Anm.

Anm. 1. Hier muß ich auch nochmahls auf die mathematische Gewißheit aufmerksam machen, welche neben der daraus entspringenden Fertigkeit dieses Denkrechnen besonders auszeichnet. Wenn man den Schülern der alten mechanischen Methode z. B. aufgibt, die Zahl zu suchen, welche gleich ist den Zahlen 27 und 28, so werden sie zwar durch Hülfe des Gedächtnisses und ihres mechanischen Verfahrens (des Untereinandersetzens und Zusammenzählens beider Ziffern) die gesuchte Zahl 55 richtig finden. Man stelle sich aber, als halte man dieß für einen Rechnungsfehler und gebe 56 als die richtige Zahl an, so werden sie voller Ungewißheit ihr Rechenexempel noch ein Mahl mechanisch durchrechnen, ohne dadurch gleichwohl zur anschaulichen und mithin vollen Gewißheit zu gelangen. Dagegen werden die Schüler des Denkrechnens nicht nur die Zahl 55 augenblicklich ohne dergleichen Ansatz finden, sondern auch beweisen, daß es diese Zahl und keine andere seyn könne, weil $27 = 20 + 7$; $28 = 20 + 8$; $20 + 20 = 40$; $7 + 8 = 15$; und $40 + 15 = 55$.

2. In dieser Ungewißheit, welche der mechanischen Methode eigen ist, mag auch der Grund zu finden seyn, daß bei ihr ein so großer Werth auf Proberechnungen gelegt wurden.

II. Vom Addiren und Multiplizinen
oder
von der einfachen Art, Zahlen bloß durchs Verbinden zu finden.

§. 31.
a) Vom Addiren überhaupt.

Addiren oder Zusammenzählen heißt die Zahl suchen, welche so viele Einheiten enthält als mehrere angegebene Zahlen zusammen genommen. Das Wort, welches dabei gebraucht wird, ist und und das Zeichen +. Gefunden kann die zu suchende Zahl (welche Summe genannt wird) auf keine andere Weise werden, als wenn ich diese Zahlen zusammenzähle oder mit einander zu einem Ganzen verbinde. Durch das vorausgegangene Numeriren und Ponderiren wird dieß auf eine sehr leichte und schnelle Weise geschehen. Anstatt jede der nachfolgenden Zahlen, welche zu der ersten gefügt werden soll, in Einheiten zu zerlegen und diese, eine nach der andern zu jener hinzuzufügen, und damit auch bei den übrigen Zahlen auf gleiche Weise fortzufahren, fassen unsere Schüler mit Einem Geistesblick die verschiedenen Zahlengrößen zu einem Ganzen zusammen z. B.

6 + (und) 3 = (ist) 9; 4 + 3 = 7; 8 + 9 = 17; 10 + 7 = 17; 36 + 72 = 10,0 + 8 = 108 rc. Was noch erforderlich ist, besteht in richtiger Anwendung dieser gewonnenen Geisteskraft, um sie zur größten Fertigkeit zu steigern. Alles kommt hierbei auf eine gehörige Abstufung der vorzunehmenden Uebungen an, wobei von dem Leichten angefangen und zu dem Schwerern immer weiter fortgeschritten werden muß. Dem zu Folge lernen unsere Schüler zuerst die Zahlen der ersten Ordnung zu 1 bis 100 addiren, wobei bloß die Zahlen 1 und 2 wegfallen, weil davon die erste schon beim Zählen von 1 bis 100, und die zweite beim Zählen mit geraden und ungeraden Zahlen vorgekommen ist. — Hierauf folgt das Addiren mit 2 Zahlen der zweiten Ordnung; dann mit zwei Zahlen, die aus der ersten und zweiten Ordnung bestehen; und zulezt mit 3 und 4 Zahlen aus den vier Grundordnungen.

Anm. 1.) Die bisherigen Rechenbücher hatten es nur mit dem Zifferrechnen, nicht aber mit dem Zahlenrechnen zu thun. Dabei war es ihnen natürlicher Weise nicht sowohl um die Befähigung der Geisteskraft zu thun, jede gesucht Zahl durch eine anschauliche Uebersicht der Zahlengrößen zu finden, als nur die Regeln anzugeben, wie ein richtiges Zifferexempel zu Stande zu bringen sey. Aber eben deßhalb lag ihnen auch ganz ausser dem Wege, hierbei eine genau abzumessende Stufenfolge zu berücksichtigen, die den Geist bei Erlangung iener höhern Fertigkeit nothwendig unterstützen muß.

2.)

2.) Die Uebung 1 + 0, 2 + 0 ꝛc. kommt hier deswegen nicht vor, weil wir es nicht mit Ziffern (folglich auch mit keiner Null) sondern nur mit Zahlen zu thun haben. Die Null ist nur beim Schreiben ein Zeichen der fehlenden Zahl. Wenn wir unsere Schüler daher fragen wollten, wie viel ist Eins und Keins, oder Drei und Keins, so würden sie uns einer solchen Frage wegen nur auslachen, oder solche bloß für Spaß halten.

§. 32.

Addiren mit Zahlen der ersten Ordnung.

1.) 1 + 3 = 4, + 3 (Sprich: 1 und 3 ist 4 und 3 noch weiter dazu ist = 7, + 3 = 10, + 3 = 13, + 3 = 16, + 3 = 19, + 3 = 22, und so weiter bis 100.

Anm. 1. In Volksschulen handelt man zur Beförderung der Achtsamkeit aller auf dasjenige, was jezt zu thun ist, sehr zweckmäßig, wenn man die Kinder der Reihe nach, wie sie sitzen, fort addiren läßt, und nicht von Einem allein dieß Geschäft vornehmen läßt, wobei die andern bald unachtsame Zuhörer werden dürften. Dabei ist es nicht nöthig, daß man die hinzuzufügende Zahl 3 immer wiederhohlen läßt, wenn die Kinder einmahl wissen, daß diese Zahl aufs neue zu jeder um drei gesteigerten Zahlgröße hinzugefügt werden soll. Die Kinder sprechen also der Reihe nach fort: 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. ꝛc.

Anm. Bei dem jedesmahligen Uebergange in eine höhere Zahlenreihe frage man nach, ob auch richtig gerechnet worden sey. Z. B. 19+3=22. Warum? 3 ist 2 und 1; 19+1=20+2=22. Will man, ohne solche Nachfrage, sich davon überzeugen, daß sie richtig operirt, und die Zahl 3 gehörig in ihre Bestandtheile zerlegt haben, um die betreffende Zahl vom Zehner vollzumachen, so darf man seine Schüler nur anhalten, die Zahl 3 nach ihren schicklichen Bestandtheilen hinzuzuzählen. Z. B. 28+2=30 und 1 dazu=31; 49+1=50+2=53; 67+(+8=3 +5) 3=70+5=75 ꝛc.

2) 2 und 3 ist 5; und 3 dazu ist 8+(3) 2=10+1 =11+3=14+3=17+3=20+3=23+26+3 =29+1=30+2=32. 35. 38. ꝛc.

3) 3 und 3 ist 6, +3=9, +3=12, +3=15, +3=18, +2=20, +1=21, +3=24, +3=27, +3=30, ꝛc.

Anm. Man sieht, daß durch diese fortsteigende dreifache Zusammensetzung der Zahl 3 mit 1. 2 und 3. alle möglichen Zusammensetzungen dieser Zahl mit allen Zahlen von 1 bis 100 erschöpft, und dadurch die hierbei zu erwerbende Fertigkeit vollendet wird.

4) 1+4=5, +4=9, +4(+1+3)=13, +4 =17, +4(+3+1)=21, +4=25, +4=29, +4 (+1+3)=33, +4=37, ꝛc.

5) 2+4=6+4=10+4=14+4=18+4(+2 +2)=22 ꝛc.

6)

6) $3+4=7+4\ (+3+1)=11+4=15+4=19+4(+1+3)=23$ ꝛc.

7) $4+4=8+4\ (+2+2)=12+4=16+4=20+4=24$ ꝛc.

8) $1+5=6+5\ (+4+1)=11+5=16+5\ (+4+1)=21+5=26$ ꝛc.

9) $2+5=7+5\ (+3+2)=12+5=17+5\ (+3+2)=22+5=27$ ꝛc.

10) $3+5=8+5\ (+2+3)=13+5=18+5\ (+2+3)=23+5=28$ ꝛc.

11) $4+5=9+5\ (+1+4)=14+5=19+5\ (+1+4)=24+5=29$ ꝛc.

12) $5+5=10+5=15+5=20+5=25$ ꝛc.

13) $1+6=7+6\ (+3+3)=13+6=19+6=25+6\ (+5+1)=31$ ꝛc.

14) $2+6=8+6\ (+2+4)=14+6=20+6=26+6(+4+2)=32$ ꝛc.

15) $3+6=9+6(+1+5)=15+6(+5+1)=21+6=27+6\ (+3+3)=33$ ꝛc.

16) $4+6=10+6=16+6\ (+4+2)=22+6=28+6\ (+2+4)=34$ ꝛc.

17) $5+6(+5+1)=11+6=17+6(+3+3)\ 23+6=29+6\ (+1+5)=35.$ ꝛc.

18) $6+6\ (+4+2)=12+6=18+6\ (+2+4)=24+6=30+6=36$ ꝛc.

19) $1+7=8+7\ (+2+5)=15+7\ (+5+2)=22+7=29+7\ (+1+6)=36$ ꝛc.

20) $2+7=9+7=16+7\ (+4+3)=23+7=30+7=37$ ꝛc.

21) 3+7=10+7=17+7 (+3+4)=24+7 (+6+1+)=31+7=38 ꝛc.

22) 4+7 (+6+1)=11+7=18+7 (+2+5) =25+7 (+5+2)=32 ꝛc.

23) 5+7 (+5+2)=12+7=19+7=26+7 (+4+3)=33 ꝛc.

24) 6+7 (+4+3)=13+7=20+7=27+7 (+3+4)=34 ꝛc.

25) 7+7 (+3+4)=14+7 (+6+1)=21+7 =28+7 (+2+5)=35 ꝛc.

26) 1+8=9+8 (+1+7)=17+8 (+3+5) =25+8 (+5+3)=33 ꝛc.

27) 2+8=10+8=18+8 (+2+6)=26+8 (+4+4)=34 ꝛc.

28) 3+8=11+8=19+8=27+8 (+3+5)=35 ꝛc.

29) 4+8=12+8=20+8=28+8=36 ꝛc.

30) 5+8 (+5+3)=13+8 (+7+1)=21+8 =29+8=37 ꝛc.

31) 6+8 (+4+4)=14+8 (+6+2)=22+8 =30+8=38 ꝛc.

32) 7+8 (+3+5)=15+8 (+5+3)=23+8 (+7+1)=31+8=39 ꝛc.

33) 8+8 (+2+6)=16+8 (+4+4)=24+8 (+6+2)=32+8=40 ꝛc.

34) 1+9=10+9=19+9=28+9 (+2+7)=37 ꝛc.

35) 2+9=11+9=20+9=29+9=38 ꝛc.

36) 3+9=12+9=21+9=30+9=39 ꝛc.

37) 4+9 (+6+3)=13+9 (+7+2)=22+9 (+8+1)=31+9=40 ꝛc.

38) $5+9\ (+5+4)=14+9\ (+6+3)\ 23+9\ (+7+2)=32$ ꝛc.

39) $6+9\ (+4+5)=15+9\ (+5+4)=24+9\ (+6+3)=33+9\ (+7+2)=42$ ꝛc.

40. $7+9\ (+3+6)=16+9\ (+4+5)=25+9\ (+5+4)=34+9\ (+6+3)=43$ ꝛc.

41) $8+9\ (+2+7)=17+9\ (+3+6)=26+9\ (+4+5)=35+9\ (+5+4)=44$ ꝛc.

42) $9+9\ (+1+8)=18+9\ (+2+7)=27+9\ (+3+6)=36+9\ (+4+5)=45$ ꝛc.

43) $1+10=11+10=21+10=31$ ꝛc.

44) $2+10=12+10=22+10=32$ ꝛc.

45) $17+10$? ($=27$. warum? $17=10+7$; $10+10=20+7=27$) $26+10$? $48+10$? $57+10$? $63+10$? $75+10$? $84+10$? $92+10$? $99+10$?

Anm. 1. Die Verbindung der 10 durfte darum nicht mit allen Zahlen von 1 bis 100 durchgeführt werden, weil die beiden Zusammensetzungen mit 1 und 2, und die Beispiele (Nr. 43.) hinreichen, die beabsichtigte Fertigkeit zu begründen. Der Schüler wird bald selbst darauf geführt werden, daß er nur die Zehner zu vereinigen braucht, die dabei stehenden Einer aber unverändert bleiben.

2) Die hier angegebene Weise zu addiren, nähmlich sich dabei genau an das Dezimalsystem zu halten, hat vor der mechanischen, selbst im praktischen Leben sehr bedeutende Vorzüge. 6 und 7 ist 13; 26 und 9 ist 35, sind Beispiele der mechanischen Additionsweise, weil sie bloß durch blinde Bei-

hülfe

hülfe des Gedächtnisses zu Stande gebracht werden. Wenn man aber in beiden Beispielen die 7 in 4 und 3 und und die 9 in 4 und 5 zerlegt, so gelangt man durch diese selbstthätige Handlungsweise zu der anschaulichen Gewißheit, daß $6+4+3=10+3=13$; und $26+4=30+5=35$ sey.

3) So weitläufig diese Uebungen zu seyn scheinen, so begründen sie doch eine vollendete Fertigkeit in dieser Rechnungsart. Uebrigens aber erfordern sie nur kurze Zeit, weil sie keine öftere Wiederholung bedürfen, und die Operation, wenn sie den Schülern einmahl geläufig geworden ist, zulezt an Geschwindigkeit einen Lauffeuer gleicht.

§. 33.

Addiren mit 2 Zahlen der zweiten Ordnung oder mit Zehnern.

1) $10+20=30+20=50+20=70+20=90+20$ $(+10+10)$ 100.

2) $20+20=40+20=60+20=80+20=100$.

3) $10+30=40+30=70+30=100$.

4) $20+30=50+30=80+30$ $(+20+10)$ 110.

5) $10+40=50+40=90+40(+10+30)=130$.

6) $20+40=60+40=100$.

7) $10+50=60+50$ $(+40+10)=110$.

8) $20+50=70+50$ $(+30+20)=120$.

9) $10+60=70+60$ $(+30+30)=130$.

10) $20+60=80+20=100$.

11) $10+70=80+70\ (+20+50)=150.$
12) $20+70=90+70\ (+10+60)=160.$
13) $10+80=90+80\ (+10+70)=170.$
14) $20+80=100.$
15) $10+90=100.$
16) $20+90\ (+80+10)=110.$

Anm. Wer will, kann seine Schüler auch auf gleiche Weise die Hunderte zusammen addiren lassen. Man wird aber bei richtiger Anwendung der hier vorgezeichneten Methode finden, daß jene hierin bereits eine Fertigkeit haben, die ihnen diese Uebung entbehrlich macht. Statt dessen gebe man ihnen daher folgende ungeordnete Exempel auf: wie viel ist 600 + 700? 700 + 800? 400 + 700? 500 + 900? ꝛc.

§. 34.

Addiren mit 2 Zahlen, die aus der ersten und zweiten Ordnung (aus Einern und Zehnern) bestehen.

1) $11+11=22$ (Beweis: 11 ist $10+1$; $10+10=20$; $1+1=2$ und $20+2=22$). $22+11=33$ $(20+10=30+2+1=33)$; $33+11=44+11=55+11=66+11=77+11=88+11=99+11=110.$

2) $11+12=23$ (Beweis: $10+10=20+1+2=23$) $+12=35+12=47+12=59+12=71$ $(59+10=69+2\ (+1+1)=71)+12=83+12=95+12=107.$

3) $11+13=24+13=37+13=50+13=63+13$
$=76+13=89+13=102\ (+89+10=99+1$
$=100+2=102)$.

4) $11+14=25+14=39+14\ (10+4)=49+4$
$(=1+3)=53+14=67+14=81+14=95$
$+14=109$.

5) $11+15=26+15\ (20+10+6+4+1)=41+15$
$=56+15=71+15=86+15=101$.

6) $11+16=27+16\ (10+3+3)=43+16=59$
$+16\ (59+1+10+5)=75+16=91+16=107$.

7) $11+17=28+17\ (+10+2+5)=45+17=62$
$+17=79+17\ (79+1+16)=96=17=113$.

8) $11+18=29+18\ (29+10+1+7)\ 47+18\ (+10$
$+3+5)\ 65+18\ (+10+5+3)=83+18\ (+10$
$+7+1)=101+18=119+18\ (=1+10+7)$
$=137$.

9) $11+19=30+19=49+19=68+19\ (+10+2$
$+7)=87+19=(+10+3+6)\ 106$.

Anm. Zur Probe, ob die Schüler durch diese Reihe von Uebungen die beabsichtigte Fertigkeit erworben haben, werden ihnen Beispiele ohne systematische Ordnung vorgelegt, und dabei strenge Rechenschaft von ihrem Verfahren abgefordert. Z. B. $13+14$ ist!? 27. Beweiset es, daß 27 gerade so viele Einheiten enthalten als 13 und 14, und nicht etwa die Zahlen 26 oder 28. (13 ist $10+3$ und 14 ist $10+4$; $10+10=20$; $3+4=7$; $20+7=27$.) — $16+17$? $17+18$? $18+19$? $22+23$? $26+27$?

$38+35$? $67+66$? $77+74$? $87+86$? $95+97$? $36+64$? $47+38$? $55+77$? $96+88$?

§. 35.

Addiren mit 3 und 4 Zahlen aus den vier Grundordnungen.

1) In auf einander folgender Reihe.

1) $4+5+6=15$. Warum? 1) $4+5=9+6$ oder $1+5=15$. 2) Auf eine andere Art bewiesen: 4 ist 1 weniger als die mittlere Zahl 5, und 6 ist 1 mehr als 5; wenn ich das Mehr zu dem Weniger lege, so erhalte ich 3 Zahlen, welche der mittlern Zahl 5 gleich sind; $4+5+6$ ist folglich gleich $5+5+5=15$.

$5+6+7=18$ (denn $6+6+6=18$). $12+13+14=13+13+13=30+9=39$. $24+25+26=25+25+25=75$.

2) $1+2+3+4+5$ (5 Zahlen, davon die mittlere 3 und jede vorhergehende eben so viele Einheiten weniger hat, als die nachfolgende mehr) $=3+3+3+3+3=5\times3=15$.

3) $1+2+3+4+5+6+7=$ (7 Zahlen, wovon die mittlere 4 ist; man darf folglich 4 nur 7 Mahl zu sich selbst zählen, so hat man die gesuchte Zahl) 28.

4) $1+2+3+4$? (Man zählt die 2 mittlern oder die 2 äussern Zahlen und verdoppelt sie, weil beide Paare einander gleich sind. Denn 4 ist $=3+1$, und $2=1+1$, folglich $4+1=3+2$. $10+11+12+13=46$. Denn $10+13=23$ und $11+12=23$; $23+23=46$.

5)

5) $120 + 121 + 122 = 121 + 121 + 121 = 363.$
$120 + 121 + 122 + 123 = 243 + 243 = 486.$

Anm. Diese auf einanderfolgenden Zahlen sind leicht zu behalten, und eignen sich daher vorzüglich zu mündlichen Rechenübungen.

2) In ungeordneter Folge.

1. Die Kinder werden aufgefordert, ihre Lebensjahre zusammen zu zählen.

2. Das eine Kind spricht Zahlen vor, und das andere muß sie geschwind addiren.

3. Der Lehrer gibt Beispiele zur schnellen Lösung auf, z. B. a) du bist jezt 6 Jahre alt; wenn du noch 64 Jahre lebst, wie alt wirst du dann? b) Jezt zählt man 1815 Jahre nach Christi Geburt. In welchem Jahre würdest du alsdann noch leben? c) Ein Mann hat bei einem seiner Schuldner 37, und bei einem andern noch ein Mahl so viel einzunehmen, wie viel hat er ausstehen? (111. beweis es, daß du richtig gerechnet hast!) d) Ein Mann hat 2 Aecker; auf dem einen hat er 142, und auf dem andern 227 Zwetschen-Bäume stehen, wie viele sind dieß zusammen? (369) e) In einem guten Obstjahre kann er mit der Zeit von jedem Baume im Durchschnitte 3 Metzen Zwetschen erndten, wie viele sind dieß? (3 + 3 + 3 Hundert sind 900; 6 + 6 + 6 Zehner sind 18 Zehner oder 180 + 900 = 1080; 9 + 9 + 9 = 27 + 1080 = 1107.)

Anm. Man darf jungen Kindern nicht zu viele Zahlen aufgeben, weil dieß leicht ihre Gedächtnißkraft zu sehr anspannt, und dann den Geist bald ermüdet, der

ohne-

ohnehin schon mit seiner verbindenden Kraft genug beschäftiget ist. Wer die bisherigen Beispiele lösen kann, kan auch mehrere Zahlen zusammenzählen. Man überhäufe sie daher nicht ohne Nothdurft, weil dieß zwecklos ist, und die Schüler beim zweiten Kursus des Zifferrechnens noch Uebungen genug finden, lange Reihen von Zahlen zusammen zu zählen, die für ihre Gedächtnißkraft nicht ermüdend sind, weil sie ihnen vor den Augen stehen.

§. 36.

Vom Multipliciren überhaupt.

Multiplizíren oder Vervielfältigen heißt die Zahl suchen, die so viele Einheiten enthält, als eine gegebene Zahl, wenn sie so oft zu sich selbst addirt wird, als eine andere angibt. Multiplizíren ist folglich ein abgekürztes Addiren mit einerlei Zahlen, wobei das Wort M a h l und das Zeichen X gebraucht wird. Statt z. B. zu sagen 3+3, sagt man 2 Mahl 3. Drei ist die Zahl, welche vervielfältiget (zu sich selbst addirt) werden soll (die G r u n d z a h l vielleicht am zweckmäßigsten deutsch genannt, weil sie bei diesem Zusammenzählen zu Grunde gelegt wird); zwei ist der V e r v i e l f ä l t i g e r, welcher aussagt, wie oft die Grundzahl zu sich selbst addirt werden soll, und 6 ist die gesuchte Zahl (das Produkt oder vielleicht noch besser die S u m m e, da es unnöthig ist, die Kunstausdrücke zu vervielfältigen). Der Lehrer aber, welcher dieß i h m hier gesagte, e b e n so seinen S c h ü l e r n wieder sagen wollte, würde dadurch verrathen,

daß

daß er die Lehrkunst nicht versteht. Es muß uns nämlich nicht darum zu thun seyn, daß die letztern obige Sätze mit dem Gedächtnisse auffassen, sondern daß sie auf eine selbstthätige Weise zu dieser Erkenntniß geleitet werden. Es ist daher folgender Unterrichtsgang hierbei zu beobachten:

1) 1+1+1 ist? (3) Wie oft nehmt ihr 1 zu 1 um die Zahl drei zu bekommen? (3 Mahl) Wie viel ist 3 Mahl 1? (3) statt 1+1+1 ist 3, kann ich mithin weit kürzer sagen? (3 X 1) Wie kann ich 3 X 1 weitläufig sagen? (1+1+1).

2) Wie kann ich 2+2+2 auch kürzer sagen? (3 Mahl 2) Wie viel ist 3+2? (6) Was gebrauche ich bei dieser kürzern Rechnungsart für ein Wort zwischen beiden Zahlen? (Mahl). Welche Zahl addire ich, wenn ich sage: 1+1+1 oder 3 X 1? (die Zahl 1.) Zu welcher Zahl addire ich Eins? (zu Eins) Wenn ich eine Zahl zu sich selbst addire, so oft als durch eine andere bestimmt oder angegeben wird, so nennt man dieß nicht mehr addiren, sondern multipliciren oder vervielfältigen. Wenn ich sage: 2+2+2 ist 6, so ist hier nicht angegeben, wie oft ich 2 zu sich selbst addiren soll; und deßhalb nennt man diese Rechnungsart, wie? (Addiren) Wenn ich aber sage: 3 X 2 ist 6, was habe ich da gethan? (Multiplizirt.) Wie oft habe ich hier die Zahl 2 zu sich selbst addiren sollen? (3 Mahl) Wie heißt man dieß, wenn man eine Zahl so oft zu sich selbst addirt, als eine andere Zahl angibt? (Multiplizíren). Was heißt multipliziren? (Eine

Zahl

Zahl so oft zu sich selbst addiren, als eine andere angibt) Multipliziret mir 5 mit 3. Was sollt ihr thun? (5 drei Mahl zu sich selbst addiren).

3) Wie viel ist denn 2 × 1? (zwei) Wie oft hast du 1 zu sich selbst addirt? (2 Mahl). Wenn du aber nur 1 Mahl 1 nehmen darfst, wie viel hast du alsdann? (Eins) Wie viel ist 6 × 1? (6) 9 × 1? (9) 15 × 1? (15) 3 × 1? (3) 2 × 1? (2) 1 × 1? (1)

4) Was ist wohl mehr, 2 × 1 oder 1 × 2? (Eins so viel als das andere). Beweise es mir! (2 × 1 = 2 und 2 = 1 × 2). Was ist wohl mehr 3 × 1 oder 1 × 3? 2 × 3 oder 3 × 2? Ihr 5 Knaben hier, wie viel Mahl 10 Finger habt ihr? (5 × 10 Finger) Und diese andern 5 Knaben, wie viel haben sie Hände? und folglich wie viel Mahl 5 Finger? (10 × 5 Finger.) Welche haben mehr Finger, diese 5 Knaben, welche zusammen 10 × 5 Finger haben, oder jene mit ihren 5 × 10 Fingern? (die einen so viel als die andern). Wie viel ist 10 × 5? (50) und 5 × 10? (auch 50.)

§. 37.

Multiplikations-Uebungen mit Zahlen aus der ersten Ordnung, in systematischer Reihenfolge überhaupt.

Diese Reihenfolge war den Lehrern längst schon mit dem sogenannten Einmahleins gegeben; nur wußten sie damit nicht anders als auf eine todte oder mechanische Weise umzugehen. Sie wendeten sich damit bloß an

das

das Gedächtniß ihrer Schüler, und glaubten Alles gethan zu haben, wenn diese das Einmahleins mit Fertigkeit herzusagen wußten. Es ist aber hier nicht von einer Uebung des Gedächtnisses die Rede, sondern der Zusammenfassungskraft des Geistes, die zur vollen Fertigkeit gesteigert werden soll. Das Einmahleins darf daher in einer guten Schule nie auswendig gelernt werden, was wir künftig nur den schlechten Schulen als eigenthümlich überlassen wollen.

Hier folgt das Einmahleins nach der bildenden Methode, mit den nöthigen Winken für Lehrer, wie sie es anzufangen haben, daß die gesuchte Zahl ein Erzeugniß der Selbstkraft ihrer Schüler werde. Wird es treulich befolgt werden, so müssen diese die gesuchten Zahlen eben so schnell durch ihre arithmetische Ueberblickkraft finden, als andere durch Hülfe des Gedächtnisses. Der Hauptvortheil bei jenen Schülern aber ist, daß sie die höhere Geisteskraft befähigt haben, während die Lehrlinge der mechanischen Methode nur ihr Gedächtniß übten.

§. 38.

Das Einmahleins nach der bildenden Methode.

1) $2 \times 2 = 4$ denn $2 + 2 = 4$.
$2 \times 3 = 6$ — $3 + 3 = 6$.
$2 \times 4 = 8$ — $4 + 4 = 8$.
$2 \times 5 = 10$ — $5 + 5 = 10$.
$2 \times 6 = 12$ — $6 + 4 + 2 = 12$.
$2 \times 7 = 14$ — $7 + 3 + 4 = 14$.

$2 \times 8 = 16$ denn $8 + 2 + 6 = 16$.
$2 \times 9 = 18$ — $9 + 1 + 8 = 18$ oder $2 \times 9 = 20$ weniger $2 \times 1 = 18$.
$2 \times 10 = 20$.

2) $3 \times 3 = 9$ denn $3 + 3 + 3 = 9$.
$3 \times 4 = 12$ — $4 + 4 + = 8 + 2 = 10 + 2 = 12$.
$3 \times 5 = 15$ — $5 + 5 = 10 + 5 = 15$.
$3 \times 6 = 18$ — $6 + 6\,(4 + 2) = 12 + 6 = 18$.
$3 \times 7 = 21$ — $7 + 7\,(3 + 4) = 14 + 7\,(6 + 1) = 21$.
$3 \times 8 = 24$ — $8 + 8\,(2 + 6) = 16 + 8\,(4 + 4) = 24$.
$3 \times 9 = 27$ — $9 + 9\,(1 + 8) = 18 + 9\,(2 + 7) = 27$.
oder $3 \times 9 = 3 \times 10$ weniger $3 \times 1\,(3) = 27$.
$3 \times 10 = 30$.

3) $4 \times 4 = 16$ — $4 \times 4 = 2 \times 8$; und $2 \times 8 = 8 + 2 + 6 = 16$.
$4 \times 5 = 20$ — $4 \times 5 = 2 \times 10 = 20$.
$4 \times 6 = 24$ — $4 \times 6 = 2 \times 12 = 2 \times 10 + 2 + 2 = 24$.
$4 \times 7 = 28$ — $2 \times 14 = 2 \times 10 + 2 \times 4 = 28$.
$4 \times 8 = 32$ — $2 \times 16 = 2 \times 10 + 2 \times 6 = 20 + 12 = 32$.
$4 \times 9 = 36$ — $2 \times 18 = 2 \times 10 + 2 \times 8 = 20 + 16 = 36$ oder $4 \times 9 = 4 \times 10$ weniger $4 \times 1 = 40$ weniger $4 = 36$.
$4 \times 10 = 40$.

4) $5 \times 5 = 25$ — $4 \times 5 = 2 \times 10 = 20$ und $20 + 5 = 25$.
$5 \times 6 = 30$ — $5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$.
$5 \times 7 = 35$ — $5 \times 7 = 3 \times 10 + 5 = 35$.
$5 \times 8 = 40$ — $5 \times 8 = 4 \times 10 = 40$.

5 ×

$5 \times 9 = 45$ denn $5 \times 8 = 40$ und 5 dazu $= 45$; oder
$5 \times 9 = 5 \times 10$ (50) weniger $5 = 45$.

$5 \times 10 = 50$

5) $6 \times 6 = 36$ — $6 \times 6 = 3 \times 12$; $3 \times 12 = 3 \times 10 + 3 \times 2 = 30 + 6$.

$6 \times 7 = 42$ — $6 \times 7 = 3 \times 7 + 3 \times 7$; $3 \times 7 = 21$; $21 + 21 = 42$.

$6 \times 8 = 48$ — $6 \times 8 = 4 \times 12 = 4 \times 10 + 4 \times 2 = 40 + 8 = 48$.

$6 \times 9 = 54$ — $6 \times 8 = 48$ und $48 + 6$ $(2 + 4)$ 54. Oder $6 \times 9 = 3 \times 9 + 3 \times 9 = 27 + 27 = 40 + 14 = 50 + 4$. Oder $6 \times 9 = 6 \times 10 (= 60)$ weniger $6 = 54$.

$6 \times 10 = 60$.

Anm. Die Lehrer gehen zwar diese verschiedene Auffindungsweise der gesuchten Zahlen alle durch; überlassen aber der eigenthümlichen Stimmung eines jeden Schülers, welche ihm darunter am meisten anspricht.

6) $7 \times 7 = 49$ denn $7 \times 7 = 3 \times 7 + 3 \times 7 = 1 \times 7$. $3 \times 7 = 21$; $21 + 21 = 42$; $42 + 7 = 49$.

$7 \times 8 = 56$ — $7 \times 8 = 6 \times 8 + 1 \times 8 = 48 + 8$ $(2 + 6)$ 56. Oder $7 \times 8 = 3 \times 7 (= 21) + 3 \times 7 (= 21) + 2 \times 7 (= 14) = 21 + 21 + 14 = 56$. Oder $7 \times 8 = 4 \times 14 = 2 \times 28 = 40 + 16 = 56$.

$7 \times 9 = 63$ — $7 \times 9 = 3 \times 7 (= 21) + 3 \times 7 +$

3 ×

3 × 7 = 21 × 3 = 63. Oder 7 × 9 = 7 × 10 (= 70) weniger 1 × 7 = 63.

7 × 10 = 70.

7) 8 × 8 = 64 denn 8 × 8 = 4 × 16 = 2 × 32 = 64. Oder 8 × 8 = 4 × 16 = 4 × 10 (= 40) + 4 × 6 = 2 × 12 = 24. 40 + 24 = 64.

8 × 9 = 72 — 8 × 9 = 4 × 9 + 4 × 9. 4 × 9 (= 18 + 18) = 36 + 36 = 60 + 12 = 72. Oder 8 × 9 = 8 × 10 (= 80) weniger 8 = 72.

8 × 10 = 80.

8) 9 × 9 = 81 — 9 × 9 = 9 × 10 (= 90) weniger 1 + 9 = 81. Oder 9 × 9 = 3 × 9 (= 27) + 3 × 9 + 3 × 9; 3 × 27 = 3 × 20 (= 60) + 3 × 7 (= 21) = 60 + 21 = 81.

9 × 10 = 90.

9) 10 × 10 = 100.

Anm. Sollte es Lehrer geben, welche nicht genugsame Fertigkeit besitzen, dieses Einmahleins nach der hier gegebenen Anleitung katechetisch oder fragweise durchzugehen, so müssen sie den schönen Aufsatz vom Schullehrer Winkler im 7. Bändchen des baierischen Schulfreundes zu Hülfe nehmen, wo meine Lehrart, in Rücksicht des Einmahleins, aufs gelungenste katechetisch durchgeführt worden ist.

§. 39

§. 39.

Das große Einmahleins nach der bildenden Methode.

Obgleich man sich gleich bei dem ersten Rechenkursus gar wohl mit dem kleinen Einmahleins begnügen kann, so dürfte es doch denjenigen Lehrern, welche ihre Schüler zu höhern Aufgaben befähigt halten, nicht unwillkommen seyn, hier auch noch eine kurze Anweisung zu finden, wie das große Einmahleins (das Eilfmaleilf) nach der bildenden Methode mit ihnen betrieben werden müsse. Dieß geschieht in katechetischer Form auf folgende Weise.

Lehrer: Das kleine Einmahleins habt ihr fertig rechnen gelernt; aber wer getraut sich von euch, nun auch das große Einmahleins oder das Eilfmahleilf mit mir durchzugehen? Kinder (äussern, durch die bildende Methode für fortstrebende Thätigkeit geweckt, laut ihre Bereitwilligkeit hierzu). L. Nun sagt mir vorher, ob ihr noch wißt, wie viel 11 ist? K. 10 + 1. L. Und was mehr ist, 10 × 11 oder 11 × 10? K. Das Eine ist so viel als das Andere. L. Wie viel ist denn 11 × 10 oder 11 Zehner? K. 11 Zehner sind 10 Zehner und 1 Zehner oder 110. L. Wie viel ist nun 11 × 11? K. (Vielleicht keine Antwort). L. Was ist mehr 11 × 11 oder 10 + 11 und 1 + 11? K. Eins so viel als das Andere. L. Wie müßt ihr also sprechen, um euch die Aufgabe 11 × 11 zu erleichtern? K. 11 × 11 = 10 × 11 oder 110 und 1 × 11 oder 121.

L. Wie viel ist 12? K. 10 + 2. L. Wie könnt ihr

also

Bayerische
Staatsbibliothek
München

also die Frage, wie viel Mahl 11 × 12 sey, auch wieder erleichten? K. Wenn wir sagen: 11 × 12 = 11 × 10 + 11 × 2. L. Wie viel ist 11 × 10? K. 11 Zehner sind 110. L. Und 11 × 2 oder 2 × 11? K. 22. L. 110 + 22 ist? K. 132. L. Welche Zahl habt ihr zerlegt, um euch hier das Multiplizíren zu erleichten? K. Die Zwölf. L. In welche Theile habt ihr sie zerlegt? K. In 10 und 2. L. Und dann statt 11 × 12 gesprochen? K. 10 × 11 + 2 × 11. L. Was müßt ihr ferner thun, wenn ich euch fragen werde, wie viel 11 × 13, 11 × 14, 11 × 15 u. s. w. sind? K. Wir müssen die Zahlen gleichfalls zerlegen. L. Wie müßt ihr also sprechen, wenn ich euch frage, wie viel ist 11 × 13? K. 11 × 13 = 11 × 10 oder 110 und 11 × 3 oder 33. L. Wie viel ist 110 + 33? K. 143. L. Wie viel ist 11 × 14? K. 154. L. Beweist es mir. K. 11 × 14 = 11 × 10 oder 110 und 11 × 4 oder 44; 110 + 44 ist 154. L. Wie viel ist 11 × 15? 11 × 16? 11 × 17? 11 × 18? 11 × 19? 11 × 20?

Anm. Wir haben nichts dagegen, wenn die Schüler obige Aufgabe, wie ist 11 × 14, auch auf folgende Weise lösen: 11 = 10 + 1; 10 × 14 = 14 × 10 = 140; 140 + 1 × 14 = 154.

L. Wie viel ist 12 × 12? K. (Vielleicht keine Antwort). Welche von beiden Zahlen habt ihr bisher immer in ihre Bestandtheile zerlegt? K. Die zweite. L. Wie heißen die beiden Bestandtheile von 12? K. 10 + 2. L. Wie kann ich also noch anders fragen, wie viel ist 12 × 12, wenn ich diese beiden Bestandtheile dabei gebrauchen will? L. Wie viel ist 12 × 10 und 12 × 2?

L.

L. Wie viel sind 12 Zehner oder 12 ⋊ 10? K. 120. L. Und 12 ⋊ 2 oder 2 ⋊ 12? K. 24. L. Und 120 + 24 ist? K. 144.

L. Wie viel ist 12 ⋊ 13? K. 12 ⋊ 13 = 12 ⋊ 10 = 120 und 12 ⋊ 3 oder 36; und 120 + 36 = 156. L. Wie viel ist 12 ⋊ 14? 12 ⋊ 15? 12 ⋊ 16? 12 ⋊ 17? 12 ⋊ 18? 12 ⋊ 19? 12 ⋊ 20?

Anm. Ich glaube nicht nöthig zu haben, das Eilfmahleilf hier ganz bis zu 20 ⋊ 20 mitzutheilen, weil sich jeder solches selbst entwerfen, und aus dem bisher Gesagten abnehmen kann, auf welche Weise die Schüler geleitet werden müssen.

§. 40.

Prüfungs-Aufgaben ohne Reihenfolge.

1. Wenn jeder der 2 (3, 4 ꝛc.) Fensterstöcke in unserem Lehrzimmer 20 Scheiben hat (oder wie viele solcher wirklich haben mag,) wie viele Fensterscheiben sind in allem vorhanden?
2. Auf jeder Bank sitzen 8 Schulkinder, 12 Bänke sind vorhanden, wie viel gibt dieß Schulkinder?

3) Jedes Kind kostet seinen Aeltern wenigstens 40 Gulden jährlich zu unterhalten, wie viel kostet ihr 50 (48. 72. 93 ꝛc.) Schulkinder den eurigen zusammen jährlich?

4) Jeder Mensch hat 12 Rippen-Paare, wie viele habt ihr zusammen?

5) Wie viel habt ihr Finger zusammen? wie viele Hände und Füße?

6.

6. Wilhelm ist 6 Jahre alt. Das Jahr hat 12 Monate, oder 52 Wochen, oder 365 Tage. Er möchte von euch wissen, wie viele Monate, wie viele Wochen, wie viele Tage er alt sey?

7. Maria ist 7 Jahre alt, und möchte dasselbe wissen.

8. In London, der Hauptstadt von England, eine der größten Städte, sterben wöchentlich gegen 400 Menschen, wie viel macht dieß in 52 (50 + 2) Wochen oder in einem Jahre aus?

9. Eine gute Henne legt jährlich gegen 90—100 Eier. Unser Nachbar hat 6 solcher Hausthiere; wie viele Eier sollten sie ihm zusammen jährlich legen?

10. Wer alle Tage für einen Kreuzer Toback raucht, gibt dafür jährlich 6 fl. 5 Kr. aus. Wie viel macht dieß in 50 Jahren? Wie viel, wenn er täglich für 3 Kreuzer Toback verbraucht?

11. Jedem Augenblick oder jede Sekunde stirbt ein Mensch auf der Welt. Wie viele sterben in 60 Sekunden (oder 1 Minute)? wie viele in 1 Stunde (oder 60) Minuten? wie viele täglich?

12. Das Jahr hat 365 Tage 6 Stunden, der Tag 24 Stunden; aus wie vielen Stunden besteht das Jahr?

Anmerkung. Es bleibt den Lehrern natürlich überlassen, ihren Schülern mehrere dergleichen Aufgaben vorzulegen. Nur sey es Regel, daß diese für das erste zarte Jugendalter zum mündlichen Rechnen nicht zu schwer, und dabei ihrem Inhalte nach anziehend seyen.

§. 41.

II. Vom Subtrahiren und Dividiren
oder
von der einfachen Art, Zahlen durch Trennung zu finden.

§. 41.
Vom Subtrahiren überhaupt.

Subtrahiren oder Abziehen heißt die Zahl suchen, welche so viele Einheiten enthält, als eine angegebene Zahl, nachdem von ihr eine gewisse Anzahl von Einheiten getrennt worden ist, z. B. welche Zahl gibt an, wie viele Einheiten die Zahlgröße 7 enthält, wenn sie um 2 vermindert wird, oder von ihr 2 getrennt werden. Man gebraucht dabei das Wort von und das Zeichen — z. B. 2 — 7 = 5 (zwei von Sieben bleibt Fünf).

Die größere Zahl wird auch hier vielleicht am zweckmäßigsten die Grundzahl genannt, die andere, welche angibt, um wie viele Einheiten jene vermindert werden soll, der Abzug, und die gefundene Zahl der Rest.

Da die Kinder schon rückwärts von 100 bis 1 zählen lernten, was ein Abziehen oder ein Vermindern um 1 ist, so ist mit dieser Urzahl kein Subtrahiren mehr anzustellen nöthig. Den folgenden Uebungen in systematischer Folge gehn die beiden Aufgaben voraus: 2—0?

 (Zwei

(Zwei von Nichts? kann man nicht sagen, weil von Nichts auch Nichts weggenommen werden kann) 2—1? (Eben so wenig, weil von 1 nicht 2, überhaupt von einer kleinern Grundzahl eine größere nicht weggenommen werden kann.)

§. 42.

Subtrakzions=Uebungen mit Zahlen aus der ersten Ordnung in systematischer Reihe.

1) 2—2=0. (Zwei von Zwei bleibt Nichts)
   2—3=1. denn 3 ist 2+1.
   2—4=2. — 4 — 2+2.
   2—5=3. — 5 — 2+3.
   2—6=4. — 6 — 2+4.
   2—7=5. — 7 — 2+5.
   2—8=6. — 8 — 2+6.
   2—9=7. — 9 — 2+7.
   2—10=8. — 10 — 2+8.

2) 3—3=0.
   3—4=1. denn 4 ist 3+1.
   3—5=2. — 5 — 2+3.
   3—6=3. — 6 — 3+3.
   3—7=4. — 7 — 3+4.
   3—8=5. — 8 — 3+5.
   3—9=6. — 9 — 3+6.
   3—10=7. — 10 — 3+7.

3) 4—4=0.
   4—5=1. denn 5 ist 4+1.
   4—6=2. — 6 — 4+2.

$4-7=3$. denn 7 ist $4+3$.
$4-8=4$. — 8 — $4+4$.
$4-9=5$. — 9 — $4+5$.
$4-10=6$. — 10 — $4+6$.

4) $5-5=0$.
$5-6=1$. denn 6 ist $5+1$.
$5-7=2$. — 7 — $5+2$.
$5-8=3$. — 8 — $5+3$.
$5-9=4$. — 9 — $5+4$.
$5-10=5$. — 10 — $5+5$.

5) $6-6=0$.
$6-7=1$. denn 7 ist $6+1$.
$6-8=2$. — 8 — $6+2$.
$6-9=3$. — 9 — $6+3$.
$6-10=4$. — 10 — $6+4$.

6) $7-7=0$.
$7-8=1$. denn 8 ist $7+1$.
$7-9=2$. — 9 — $7+2$.
$7-10=3$. — 10 — $7+3$.

7) $8-8=0$.
$8-9=1$. denn 9 ist $8+1$.
$8-10=2$ — 10 — $8+2$.

8) $9-9=0$.
$9-10=1$.
$10-10=0$.

§. 43.

Subtrahiren der Zahlen erster Ordnung von 100 bis auf 1 zurück in systematischer Reihe.

1) 2 — 100 = 98 — 2 = 96 — 2 = 94 — 2 = 92 — 2 = 90 — 2 = 88. 86. 84. 82. 80. 78. und so weiter bis auf o zurück.

2) 2 — 99 = 97 — 2 = 95 — 2 = 93 — 2 = 91. — 2 = 89 87. 85. 83. 81. 79. u. s. w.

3) 3 — 100 = 97 — 3 = 94 — 3 = 91 — 3 (91 — 1 = 90 — 2) = 88. 85. 83. 80. 77. u. s. w.

4) 3 — 99 = 96 — 3 = 93 — 3 = 90 — 3 = 87. 84. 81. u. s. w.

5) 4 — 100 = 96 — 4 = 92 — 4 (2 + 2) = 88. 84. 80. 76. u. s. w.

6) 4 — 99 = 95 — 4 = 91 — 4 (1 + 3) = 87. 83. 79. u. s. w.

7) 5 — 100 = 95 — 5 = 90 — 5 = 85. 80. 75. u. s. w.

8) 5 — 99 = 94 — 5 (4 + 1) = 89 — 5 = 84 — 5 = 79. u. s. w.

9) 6 — 100 = 94 — 6 (4 + 2) = 88 — 6 = 82 — 6 (2 + 4) = 76. 70. u. s. w.

10) 6 — 99 = 93 — 6 (3 + 3) = 87 — 6 = 81 — 6 (1 + 5) = 75. u. s. w.

11) 7 — 100 = 93 — 7 (3 + 4) = 86 — 7 (6 + 1) = 79 — 7 = 72 — 7 (2 + 5) = 65. u. s. w.

12) 7 — 99 = 92 — 7 (2 + 5) = 85 — 7 (5 + 2) = 78 — 7 = 71 — 7 (1 + 6) = 64. u. s. w.

13) 8 — 100 = 92 — 8 (2 + 6) = 84 — 8 (4 + 4) = 74 — 8 = 66. u. s. w.

14) 8 — 99 = 91 — 8 (1 + 7) = 83 — 8 (3 + 5) = 75 — 8 (5 + 3) = 67. u. s. w.

15) 9 — 100 = 91 — 9 (1 + 8) = 82 — 9 (2 + 7) = 73 — 9 (3 + 6) = 64. u. s. w.

16) 9 — 99 = 90 — 9 = 81 — 9 (1 + 8) = 72 — 9 (2 + 7) = 63. u. s. w.

17) 10 — 99 = 89 — 10 = 79 u. s. w.

Anm. Die eingeklammerten Zahlen zeigen dem Lehrer an, was er zu thun hat, um die Geistesoperation seiner Schüler bei diesen Aufgaben richtig zu leiten.

§. 44.

Subtrahiren mit gemischten Zahlen ausser der Reihe.

1) 12 von 36 bleibt wie viel? 24. Ist dieß gewiß? Ja, denn 36 = 30 + 6; 24 = 20 + 4; Wenn man 30 um 10 vermindert, bleibt 20; und wenn man 6 um 2 vermindert, bleibt 4; 20 + 4 aber ist 24. Oder: 12 = 6 + 6; 6 — 36 = 30 — 6 = 24.

2) 24 — 38 = ? (14). 63 — 97 = ? (34). 14 — 55 = ? (41). 23 — 88 = ?

3) 11 — 20 = ? (9, denn 10 — 20 = 10 — 1 = 9). 15 — 24 = 9, denn 15 — 20 = 5 + 4 = 9; oder 10 — 20 = 10 + 4 = 14 — 5 (4 + 1) = 9. 18 — 27 = ? (18 — 20 = 2 + 7 = 9) 18 — 31 = ? (31 = 20 + 11? 18 — 20 = 2 + 11 = 13. Oder 18 = 10 + 8; 10 — 31 = 21 — 8 (1 + 7) = 13). 28 — 35 = ? (7, denn 28 — 30 = 2 + 5 = 7). 36 — 75 = ? (36 = 30 + 6;

30 — 75 = 45 — 6 (5 + 1) = 39). 58 — 93 = ? (35, denn 58 = 50 + 8; 50 — 93 = 43 — 8 (3 + 5) = 35. Oder 93 = 80 + 13; 8 — 13 = 5; 50 — 80 = 30; 30 + 5 = 35.

Anm. Eben diese verschiedenen Auflösungsarten befördern die Befähigungskraft der Schüler, Zahlen zu handhaben, ungemein, weßhalb die Lehrer wohl thun, wenn sie jene anreizen, solche verschiedene Berechnungsweisen selbst aufzufinden, oder wenn sie ihnen höchstens Winke dazu geben.

4) 300 — 1000 = ? (700, denn 1 Tausend sind 10 Hunderte; 3 Hunderte von 10 Hunderten (3,00 — 10,00) bleibt 7,00.) 10 — 1000 = (990, denn 1000 sind 10,00 oder 9,00 + 1,00; 10 von 1,00 (10,0, ein Zehner von zehn Zehnern) = 90; 90 + 900 = 990.) 9 — 1000 = (991, 9 — 100 = 91; 91 + 900 = 991). 27 — 1000 = ? 230 — 1000 = ? 737 — 1000 = ? (7,00 — 10,00 = 300 = 200 + 100; 100 — 30 = 70 — 7 = 63 + 200 = 263.)

§. 45.

Probeübungen.

1. Es sind jezt 94 Schüler in unserer Schule; auf Michaelis werden 17 entlassen, wie viele bleiben noch?
2. Wie alt hoffst du, Wilhelm, zu werden? (75. 80. 100 Jahre) Wie alt bist du jezt? Wie lange würdest du noch leben, wenn dein Wunsch erfüllt würde?
3. Es hat jemand 1000 fl. in Vermögen, wovon er alle

Tage

Tage 1 fl. verzehren will. Es fragt sich, wie lange er damit auskommen wird? Das Jahr hat 365 Tage. Nach dem ersten Jahre bleibt ihm? Nach dem dem zweiten?

4. Ich bin 54 Jahre alt, in welchem Jahre bin ich folglich gebohren? Zieht nur 54 Jahre von der Jahreszahl 1815 ab!

5. Johann hat sich in seinem Spartopfe schon 100 fl. weniger 97 fl. 36 kr. gesammelt; wie viel hat er wohl darin?

6. Im Jahre 1492 wurde Amerika von Kolumbus entdeckt, wie lange ist dieß?

7. Im Jahr 1586 kamen die ersten Kartoffeln aus Amerika nach Europa; im Jahr 1650 nach Deutschland, wie lange ist dieß?

8. Im Jahr 1517 verbesserte D. Luther die katholische Kirche; wie lange ist dieß?

9. Gegen das Jahr 1300 wurde das Papier, und im Jahre 1440 von Guttenberg das Buchdrucken erfunden, wie lange ist dieß?

10. Im Jahr 1350 erfand Schwarz das Schießpulver, wie lange ist dieß?

11. Im Jahr 555 wurden die Wassermühlen erfunden, und im Jahr 276 wurde der Weinbau nach Deutschland gebracht, wie lange ist dieß her?

12. Im Jahre 1796 wurden von D. Jenner, einem Deutschen in England, die Kuhpocken eingeführt, wie lange ist dieß?

13. Im Jahre 1500 hat Peter Hele zu Nürnberg die ersten Sackuhren bekannt gemacht, wie lange ist dieß?
14. Jürgen erfand zu Braunschweig 1530 das Spinnrad, wie lange ist dieß?

§. 46.

b. Vom Dividiren überhaupt.

Dividiren heißt die Zahl suchen, welche angibt, wie oft man eine Zahl von einer andern wegnehmen oder subtrahiren kann. Es ist ein öfteres Vermindern durch dieselbe Zahl, wie multipliziren ein öfteres Vermehren durch dieselbe Zahl. Eine jede Zahl kann aber nur so oft von der andern abgezogen werden, als sie in derselben enthalten ist. Z. B. 2 ist 3 Mahl in 6 enthalten (denn 2+2+2=6), mithin kann sie auch 3 Mahl davon weggenommen oder in drei Theile getheilt werden, wovon jeder 2 enthält. 3 ist folglich die gesuchte Zahl, welche angibt, wie oft die Zahl 6 um 2 vermindert werden kann, oder wie oft 2 in 6 enthalten ist. Der Ausdruck ist daher gleich bedeutend: 2 in 6 ist 3 Mahl enthalten (habe ich 3 Mahl); oder 2 von 6 kann man 3 Mahl nehmen. 6 ist in diesem Beispiele die Grundzahl wieder, 2 die Theilungszahl oder der Theiler, und 3 der Quotient. Als Zeichen wird: gebraucht, welches gelesen wird in. Z. B. 2: 6 = 3, Zwei in 6 hat man 3 Mahl.

§. 47.

§. 47.

Vorübungen.

1.) Nimm 2 von 6 hinweg, so bleibt? 4. Und von 4 nimm 2 hinweg, wie viel bleibt? 2. Und von diesen 2 nimm wieder 2 hinweg, wie viel bleibt noch übrig? (Nichts) — Nimm dagegen 6 von 7 hinweg, bleibt etwas übrig, oder geht die eine Zahl in die andere auf? 1 bleibt übrig. (Was man den Rest nennt) Wenn du 3 von 6 zwei Mahl wegnimmst, bleibt ein Rest, oder geht 3 in 6 auf?

Anm. Der Rest wird noch nicht als ein Bruch oder als eine Theilzahl dargestellt, weil die Schüler noch keinen Begriff davon haben, sondern bloß als etwas nicht weiter zu Theilendes stehen gelassen.

2.) Was ist die Hälfte von 2, von 4. 6. 8. 10? In wie viele Theile kann man 3. 6. 9. 8. 10. theilen?

3.) theilt 20 in 2 in 4 Theile

30	— 2	— 3	in	5	Theile.	
40	— 2	— 4	—	8	—	
50	— 2	— 5	—	10	—	
60	— 2	— 4	—	3	—	
70	— 2	— 10	—	14	—	
80	— 2	— 4	—	16	—	
90	— 2	— 3	—	10	—	
100	— 2	— 4	—	5	—	

4.) Wie viel ist die Hälfte von 24? 12. Ist dieß gewiß? (24 = 20 + 4; von 20 ist die Hälfte 10 und von 4 ist die Hälfte 2; 10 + 2 = 12. Wenn man beide

Hälf-

Hälften mit einander wieder verbindet, wie viel muß das Ganze ausmachen? 24. Ist dieß gewiß? (12=10+2; 10+10=20; 2+2=4; 20+4=24.) Was ist folglich die Hälfte von 24? 12. Und die Hälfte wieder von 12? 6. Und von 6? Wie oft ist 12 in 24 enthalten? Wie oft 6 in 24? Wie oft 3 in 24? — Von welcher Zahl kann man 4 Mahl 6 wegnehmen? Warum nicht auch von 12 oder 23? Aber warum von 25? (Weil 25 = 24 + 1.)

5.) Wer findet die Zahl, welche die Hälfte von 32 enthält? (16) Ist 16 ganz gewiß die Hälfte von 32? (ja, denn 32 = 30 + 2, von 30 ist die Hälfte 15 und von 2 ist die Hälfte 1.) — Was ist die Hälfte von 16? (8) Beweis: 16 = 10 + 6; die Hälfte von 10 ist 5 und von 6 die Hälfte 3; 5 + 3 = 8. Oder: 8 = 6 + 2; 8 + 2 + 6 = 16.

6.) Wie vielmahl ist 8 in 16 enthalten? und in 32? (4 Mahl.) Beweis: 32 = 16 + 16; 16 = 8 + 8, folglich ist 8 in 8 Ein Mahl, in 16 zwei Mahl, und in 32 4 Mahl enthalten. — Was ist die Hälfte von 8? 4. Wie vielmahl ist 4 in 8 enthalten? 2 Mahl. Und folglich in 16 = 8 + 8? 4 Mahl. Und in 32 = 16 + 16? 8 Mahl.

7.) Was ist die Hälfte von 48? von 24? von 12 von 6? Wie oft ist 3 in 6 enthalten? In 12? In 24? In 48? Wie vielmahl 6 in 12? In 24? In 48?

8.) Was ist die Hälfte von 36? Das Viertel? Was ist das Drittel von 36; das Sechstel? das Zwölftel? Wie oft hat man 3 in 6? in 12? in 24? in 36?

9.) Was ist die Hälfte von 60? Das Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, Zehntel.

10.) In welcher Zahl ist

2	ein Mahl	enthalten?	in	2,	denn	$1+2=2$
2	zwei	—	—	— 4	—	$2+2=4$
2	drei	—	—	— 6	—	$3+2=6$
2	vier	—	—	— 8	—	$4+2=8$
2	fünf	—	—	— 10	—	$5+2=10$
2	sechs	—	—	— 12	—	$6+2=12$
2	sieben	—	—	— 14	—	$7+2=14$
2	acht	—	—	— 16	—	$8+2=16$
2	neun	—	—	— 18	—	$9+2=18$
2	zehn	—	—	— 20	—	$10+2=20$

12.) In welcher Zahl ist 3 ein Mahl enthalten?
4 zwei Mahl u. s. w. wie oben.

12.) In welcher Zahl ist 4 ein Mahl enthalten?
4 zwei Mahl u. s. w. wie oben.

13.) In welcher Zahl ist 5 ein Mahl enthalten?
5 zwei Mahl u. s. w. wie oben.

14.) In welcher Zahl ist 6 ein Mahl enthalten?
6 zwei Mahl u. s. w. wie oben.

15.) In welcher Zahl ist 7 ein Mahl enthalten?
7 zwei Mahl u. s. w. wie oben.

16.) In welcher Zahl ist 8 ein Mahl enthalten?
8 zwei Mahl wie oben u. s. w

17.) In welcher Zahl ist 9 ein Mahl enthalten?
9 zwei Mahl u. s. w.

18.) In welcher Zahl ist 10 ein Mahl enthalten? u. s. w.

19.) In welcher Zahl ist 11 ein, zwei bis zehn Mahl enthalten.

Anm.

Anm. Diese Uebung kann, zur Begründung einer Fundamental Sicherheit der Schüler im Dividiren, eben so mit 12. 13. bis 20 fortgesetzt werden.

§. 48.

Divisionsübungen in systematischer Folge.

a. Mit Theilern und Quotienten aus der ersten Zahlenordnung.

1) 2:2=1 (zwei in zwei ist enthalten ein Mahl) denn 1 × 2=2.

2:3=1 und 1 bleibt übrig. 2:4=2. 2:5=2 und 1 bleibt übrig.

2:6=3. 2:7=3 u. 1 bl. übrig. 2:8=4. 2:9=4 und 1 bleibt übrig.

2:10=5. 2:11=5 u. 1 darüber. 2:12=6. 2:13 =6 und 1 darüber.

2:14=7. 2:15=7 u. 1 d. 2:16=8. 2:17=8 u. 1 d.

2:18=9. 2:19=9 u. 1. d. 2:20=10.

Anm. Bei den folgenden Uebungen werden die Schüler ermuntert, diejenigen Grundzahlen nur zu nehmen, in welche die Theiler aufgehen, und diejenigen zu überspringen, welche darzwischen liegen und in welche die Theiler nicht aufgehen.

2) 3:3=1 3:6=2 3:9=3 3:12=4 3:15=5
3:18=6 3:21=7 3:24=8 3:27=9 3:30=10

3) 4:4=1 4:8=2 4:12=3 4:16=4 4:20=5
4:24=6 4:28=7 4:32=8 4:36=9 4:40=10

4) 5:5=1 5:10=2 5:15=3 5:20=4 5:25=5

5:

5:30=6	5:35=7	5:40=8	5:45=9	5:50=10
5) 6:6=1	6:12=2	6:18=3	6:24=4	6:30=5
6:36=6	6:42=7	6:48=8	6:54=9	6:60=10
6) 7:7=1	7:14=2	7:21=3	7:28=4	7:35=5
7:42=6	7:49=7	7:56=8	7:63=9	7:70=10
7) 8:8=1	8:16=2	8:24=3	8:32=4	8:40=5
8:48=6	8:56=7	8:64=8	8:72=9	8:80=10
8) 9:9=1	9:18=2	9:27=3	9:36=4	9:45=5
9:54=6	9:63=7	9:72=8	9:81=9	9:90=10
9) 10:10=1	10:20=2	10:30=3	10:40=4	10:50=5
10:60=6	10:70=7	10:80=8	10:90=9	10:100=10

§. 49.

b. Mit Theilern von 11 bis 20 und Quotienten der ersten Zahlenordnung.

1) 11:11=1	11:22=2	11:33=3	11:44=4	11:55=5
11:66=6	11:77=7	11:88=8	11:99=9	11:110=10
2) 12:12=1	12:24=2	12:36=3	12:48=4	12:60=5
12:72=6	12:84=7	12:96=8	12:108=9	12:120=10
3) 13:13=1	13:26=2	13:39=3	13:52=4	13:65=5
13:78=6	13:91=7	13:104=8	13:117=9	13:130=10
4) 14:14=1	14:28=2	14:42=3	14:56=4	14:70=5
14:84=6	14:98=7	14:112=8	14:126=9	14:140=10
5) 15:15=1	15:30=2	15:45=3	15:60=4	15:75=5
15:90=6	15:105=7	15:120=8	15:135=9	15:150=10
6) 16:16=1	16:32=2	16:48=3	16:64=4	16:80=5
16:96=6	16:112=7	16:128=8	16:144=9	16:160=10
7) 17:17=1	17:34=2	17:51=3	17:68=4	17:85=5
17:102=6	17:119=7	17:136=8	17:153=9	17:170=10
8) 18:18=1	18:36=2	18:54=3	18:72=4	18:90=5

18:108=6 18:126=7 18:144=8 18:162=9 18:180=10

9) 19:19=1 19:38=2 19:57=3 19:76=4 19:95=5

19:114=6 19:133=7 19:152=8 19:171=9 19:190=10

10) 20:20=1 20:40=2 20:60=3 20:80=4 20:100=5

20:120=6 20:140=7 20:160=8 20:180=9 20:200=10

Anm. Gerade durch diese Uebungen mit zwei Theilern, welche den Schülern von verständigen Lehrern nach frühern Winken erleichtert werden können, werden jene die Schwierigkeiten besiegen lernen, welche sich bisher in allen Schulen vorgefunden haben, wenn mit 2 Zahlen dividirt werden sollte.

§. 50.

c. Mit Theilern der ersten Ordnung und mit Grundzahlen, welche aus der ersten und zweiten Ordnung zusammengesetzt sind.

Die Grundzahlen, welche wir hierzu vorschlagen, sind: 25. 36. 47. 66. 76. 84. 99. welche mit 2 bis 10 dividirt werden. Die dabei der Reihe nach anzuwendende Methode soll an der vorlezten hier nachgewiesen werden.

1) Wie oft ist in 84 die Zahl 2 enthalten? 42 Mahl. Warum? 84 ist 80 + 4; von 80 ist die Hälfte 40 und von 4 die Hälfte 2; 40 + 2 = 42.

2) Wie oft die Zahl 3? 3 ist in 80 nur 20 und nicht 30 Mahl enthalten, weil 3 × 30 = 90. 3 × 20 = 60; 60 — 84 = 24; 3:24 = 8; 20 + 8 = 28.

3) Wie oft die Zahl 4? 21 Mahl, denn 4:80 = 20; 4:4 = 1; und 20 + 1 = 21.

4) Wie oft die Zahl 5? 16 Mahl und 4 übrig; denn

80 = 50 + 30; 5 : 50 = 10; 5 : 30 = 6; 10 + 6 = 16; 5 : 4 = 0 (kein Mahl) mithin bleiben 4 übrig. Oder 5 ist die Hälfte von 10; 10 : 80 = 8; folglich 5 : 80 = 2 × 8 = 16.

5) Wie oft die Zahl 6? 14 Mahl, denn 84 = 60 + 24; 6 : 60 = 10; 6 : 24 = 4; 10 + 4 = 14.

6) Wie oft die Zahl 7? 12 Mahl, denn 84 = 70 + 14; 7 : 70 = 10; 7 : 14 = 2; 10 + 2 = 12.

7) Wie oft die Zahl 8? 10 Mahl und 4 darüber, denn 8 : 80 = 10; 8 : 4 = 0; folglich 10 Mahl und 4 darüber.

8) Wie oft die Zahl 9? 9 Mahl und 3 darüber, denn 9 × 9 = 81; und 81 — 84 = 3.

9) Wie oft die Zahl 10? 8 Mahl und 4 darüber.

§. 51.

d. Mit dreifachen Grundzahlen.

1) Wie oft ist in 164 die Zahl 2 enthalten? 82 Mahl, denn 2 : 100 = 50; 2 : 60 = 30; 2 : 4 = 2; und 50 + 30 + 2 = 82. Oder 160 = 16 Zehner; 2 : 16 Zehner sind 8 Mahl enthalten; 2 : 4 = 2; 8 Zehner = 80 + 2 = 82.

2) Wie oft die Zahl 3? 164 = 150 + 14; 3 : 150 = 50; 3 : 14 = 4 und 2 übrig; folglich 53 und 2 übrig.

3) Wie oft die Zahl 4? 4 : 160 = 40; 4 : 4 = 1; 40 + 1 = 41.

4) Wie oft die Zahl 5? 164 = 150 + 14; 5 : 150 = 30; 5 : 14 = 2 und 5 übrig; folglich 32 und 5 übrig.

Oder

Oder 5:100=20; 5:60=12; 20+12=32 und 4 übrig.

5.) Wie oft die Zahl 6? 164=120+44; 6: 120=20; 6: 44=7 und 2 übrig; folglich 27 und 2 übrig.

6.) Wie oft die Zahl 7? 164=140+22; 7: 140=20; 7: 22=3 und 1 übrig; folglich 20+3=23 und 1. bleibt übrig.

7.) Wie oft die Zahl 8? 20 und 4 übrig, denn 8: 160=20 und 4 darüber.

8.) Wie oft die Zahl 9? 164=90+74; 9: 90=10; 9: 74=8 und 2 übrig; folglich 10+8=18 und 2 übrig.

9.) Wie oft die Zahl 10? 16 Mahl und 4 übrig.

Anm. Es können noch einige Beispiele dieser Art, z. B. drei Grundzahlen 740. 637. 958. mit den Schülern durchgerechnet werden. Nur hüthe man sich, ihnen Beispiele von 4 und mehrern Grundzahlen aufzugeben, die schwerer zu behalten sind. Diese sind für das schriftliche Rechnen aufzuheben, wo man durch Ziffern zwei Zahlen vest vor sich hinstellen kann.

§. 52.

e. Einige Prüfungs Exempel.

1. Das Jahr bestehet aus 365 Tagen. Wie viel Tage kommen auf ein halbes, auf ein viertel Jahr? Wie viel Wochen enthält das Jahr? Wie viel Tage kommen

men auf 12 Monate, wenn man sie gleich vertheilen wollte?

2. Es hat jemand den Armen seines Wohnorts 1000 fl. vermacht, welche unter ihnen gleich vertheilt werden sollen. Nun fanden sich wirklich Arme daselbst, 25 (30. 33. 45. 49.) wie viel bekam ein jeder?

3. Es hat eine arme Frau so viele Kreuzer geschenkt bekommen, als die Jahrzahl Einheiten enthält, folglich 1815. Wenn sie alle Tage einen Kreuzer ausgiebt, so hat sie 1815 Tage daran; wie viel Jahre und Wochen sind dieß? Wenn sie aber täglich davon 2. 3. 4 bis 10 Kreuzer ausgeben muß, wie lang reicht diese Geldsumme für ihre Bedürfnisse zu?

4. Ein Mann schickte einst 600 Kirschen in die Schule zur Vertheilung unter die 12 fleißigsten Schulkinder. Wie viel bekommt Eines davon? Wie viel Kirschen hätte jedes bekommen, wenn es noch ein Mahl so viel oder 1200 Kirschen gewesen wären? Wie viel folglich von der Hälfte? — Wie viel Kirschen hätte jedes Kind erhalten, wenn die Kirschen nur unter 6 wären vertheilt worden? Da aber noch ein Mahl so viel Kinder waren, so bekam jedes nur?

IV. Von der Regel Detri oder der schließenden Rechnungsart.

§. 53.

Vorerinnerung.

Die Lehrer werden sich nicht nur selbst besser in diese Rechnungsart finden lernen, sondern auch im Stande seyn, die Verstandeskraft ihrer Schüler an diesem Rechenstoffe vorzüglich auszubilden, wenn sie sich die Operation dabei als ein bloßes Schließen, oder Ableiten eines Zahlensatzes aus dem andern vorstellen. Was ihnen dabei schwer fallen möchte, ist die Weise, wie die Kinder dabei zur Besonnenheit ihres Thuns, und dadurch zum Bewußtseyn der vollen Wahrheit und Sicherheit desselben gebracht werden. Ich halte es daher für zweckmäßig, wenn ich diese ganze Rechnungsart in Gesprächform hier vortrage. Nur dieß Einzige schicke ich zu mehrerer Verständigung der Lehrer noch voraus, daß schließen nichts anders heißt, als einen Satz aus einen andern ableiten, in welchem er schon enthalten ist, und folglich ihn nur zum besondern Bewußtseyn bringen. Z. B. der Satz, daß alle Menschen sterblich sind, umschließt

(umfaßt) den Satz, daß der Mensch, Kaiser Alexander genannt, auch sterblich sey. Die kurze Schlußform ist: wenn alle Menschen sterblich sind, so ist auch Kaiser Alexander (der unter allen Menschen schon enthalten ist) sterblich. Dieselbe Schlußform kommt auch in der Rechenkunst vor. Wenn eine Maaß Wein 24 Kr. kostet, so kosten 60 Maaß 60 Mahl 24ger. Der letztere Satz ist auch hier in dem erstern enthalten (von ihm umschloßen) denn 60 Maaß sind 60 Mahl eine Maaß. Da nun jede einzelne Maaß 24 Kr. kostet, so muß ich 60 Mahl 24 Kr. für jede einzelne in 60 Maaß enthaltene Maaß zahlen.

§. 54.

Vom Schließen im Rechnen überhaupt.

Lehrer: wenn 1 Apfel auf dem Markte 1 Kreuzer kostet, und du willst dir daselbst 2 Aepfel kaufen, wie viele Kreuzer muß du dafür zahlen? Kind: 2 Kreuzer. L. Warum? (Vielleicht keine Antwort, weil das Kind noch nicht zum Bewußtseyn seines Thuns bei diesem Schlusse gekommen ist) L. Wie viel Mahl 1 Apfel willst du kaufen? K. 2 Mahl 1 Apfel. L. Wie viel Mahl 1 Kreuzer mußt du folglich zahlen? K. Auch 2 Mahl 1 Kreuzer. L. 2 Mahl 1 Kreuzer aber ist? K. 2. Wenn du 3 Aepfel kaufen willst, wie viel Mahl 1 Kreuzer mußt du zahlen? K. 3 Mahl 1 Kreuzer oder 3 Kreuzer. L. Wenn du 4. 5. 6. Aepfel kaufen willst, wie viel muß du zahlen? K. 4. 5. 6 Mahl 1 Kreuzer. L. Ich will mir auch eine gewisse Anzahl von Aepfel kaufen, die ich

dir nicht sage, und die du auch nicht zu wissen brauchst. Aber doch sollst du mir sagen, wie viel ich Kreuzer zahlen muß? K. So viel Sie Aepfel kaufen, so viel Mahl 1 Kreuzer müssen Sie zahlen. (Sollte das Kind diese Antwort noch nicht geben können, so schickt man noch die Frage voraus: wie viele Kreuzer hast du zahlen müssen, als du 4. 6. Aepfel kauftest? Hast du eben so viele Kreuzer zahlen müssen, oder mehrere oder wenigere als du Aepfel gekauft hast? Wie viel muß ich folglich Kreuzer zahlen, ich mag so oder so viel kaufen? K. So viel Sie Aepfel kaufen, so viel Mahl 1 Kreuzer müssen sie zahlen. L. Aber wenn ich hundert, wenn ich tausend, wenn ich hundert tausend Aepfel kaufen will, wie viel muß ich dann zahlen? K. Eben so viele Kreuzer als Sie Aepfel kaufen.) L. Sag mir noch ein Mahl, wie du schließt, wenn 1 Apfel 1 Kreuzer kostet, so muß ich für 10 Aepfel zahlen, wie viel? K. 10 Kreuzer. Wie schließt du denn aber, wenn ein Apfel 2 Kreuzer kostet, wie viel Mahl 2 Kreuzer müßte ich dann zahlen? K. 10 Mahl 2 Kreuzer. L. Warum denn jezt 10 Mahl 2 Kreuzer und nicht 10 Mahl 1 Kreuzer? K. Weil 1 Apfel nicht 1 Kreuzer, sondern 2 Kreuzer kostet. L. Schließe ich denn recht oder unrecht, wenn ich sage: So viel Aepfel ich kaufe, so viel Mahl 2 Kreuzer muß ich zahlen? K. Ich schließe recht. L. Was hast du jezt für ein Wort gebraucht? K. Das Wort schließen. L. Wenn ich sage: da ein Apfel 2 Kreuzer kostet, so muß ich für 3 Aepfel 7 Kreuzer zahlen; habe ich da recht geschloßen oder falsch? K. Ich habe falsch

falsch geschloßen. L. Warum? K. Weil 3 Mahl 2 Kreuzer nur 6 und nicht 7 Kreuzer sind. L. Aber warum muß ich denn für 3 Aepfel 6 Kreuzer zahlen? K. Weil ein Apfel 2 Kreuzer kostet, und 3 Mahl 2 Kreuzer 6 Kreuzer sind.

L. Merkt auf, Kinder, jezt will ich von einem andern Haupt-Satze ausgehen; 1 Apfel soll 3 Kreuzer kosten, wie viel kosten denn nun 3 Aepfel? K. 9. L. Warum lautet denn jezt euer Schlußsatz anders? K. Weil der Hauptsatz anders lautet. L. Wie lautet denn jezt der Hauptsatz? K. 1 Apfel kostet 3 Kreuzer. L. Wie hat der Hauptsatz vorhin gelautet? K. 1 Apfel kostet 2 Kreuzer. L. Wie nennt man diesen Satz? K. einen Hauptsatz. L. Und wie heißt der Satz, der daraus hergeleitet oder geschlossen wird? K. der Schlußsatz. L. Wie viel Sätze sind also in einem Rechenschluße? K. zwei. L. wie heißt der erste Satz, aus welchem der zweite abgeleitet wird? K. Der Hauptsatz. L. Was ist also der Hauptsatz bei einem Rechenschluße? K. Der Satz, aus welchem der Schlußsatz abgeleitet wird. L. Und was ist ein Schlußsatz? K. Der Satz, der aus einem andern abgeleitet wird. L. Aus welchen beiden Sätzen besteht ein Rechnungsschluß? K. Aus dem Haupt- und dem Schlußsatze. L. Wenn ich aus einem Satze einen andern ableite, was bringe ich hervor? K. Einen Schluß L. Und wenn dieser Schluß aus Zahlen besteht, so heiße ich ihn? K. Einen Rechenschluß. L. Wie heißt man aber das, was die Seele thut, wenn sie aus einem Satze einen andern Satze ableitet? K. schließen. L. Wenn du schließen

ßen sollst, was mußt du also thun? L. Ich muß einen Satz aus dem andern ableiten. L. Als du vorhin sagtest „wenn 1 Apfel 2 Kreuzer kostet, so muß ich für 3 Aepfel 3 Mahl 2 oder 6 Kreuzer zahlen", was that da deine Seele? K. Sie schloß. L. Was sie durch dieß Schließen hervorbrachte, heißt? K. ein Rechenschluß. L. Sag mir noch ein Mahl, aus wie vielen Sätzen besteht ein Rechenschluß? L. Aus zweien, einem Hauptsatze und einem Schlußsatze. L. Und welcher Satz wird aus dem andern abgeleitet? K. der Schlußsatz aus dem Hauptsatze. L. Womit muß der Schlußsatz übereinstimmen, wenn er richtig seyn soll? K. Mit dem Hauptsatze. L. Als ich vorhin einmahl sagte „wenn ein Apfel 2 Kreuzer kostet, so kosten 3 Aepfel 7 Kreuzer" warum war dieser Rechenschluß falsch? K. weil er nicht mit dem Hauptsatze zusammen stimmte? L. Stimmt er denn wirklich nicht mit dem Hauptsatze überein! Was kostet ein Apfel nach dem Hauptsatze? K. 2 Kreuzer. L. Wie viel müßte 3 Mahl ein Apfel kosten? K. 3 Mahl 2 Kreuzer oder 6 und nicht 7. L. Wie verhalten sich folglich beide Sätze gegeneinander? K. Sie stimmen nicht zusammen. L. Was muß also seyn, wenn ein Rechenschluß recht und nicht falsch seyn soll? K. Der Schlußsatz muß mit dem Hauptsatz zusammen stimmen. L. Was thut man, wenn man einen Rechensatz aus dem andern ableitet? L. Man schließt. L. Was haben wir also heute für eine Art zu rechnen angefangen? K. Das Schlußrechnen.

Anm. Wer den Mittelsatz bei diesem Rechenschlusse ungern vermißt, kann ihn noch hinzusetzen, und daher

her schließen lassen: 1 Apfel kostet 2 Kreuzer, 3 Aepfel sind 3 × 1 Apfel, folglich kosten auch 3 Aepfel 3 × 2 kr. Aber wir finden diese logische Vollständigkeit hier ganz unnöthig.

§. 55.

Von den vier Zahlgliedern in einem Rechenschlusse.

L. Aus wie vielen Sätzen besteht ein Rechenschluß? K. Aus zweien, nämlich dem Hauptsatze und dem Schlußsatze. L. Wie viele Zahlen enthält jeder Satz? Hört nur auf die Zahlen, die in dem Rechenschlusse vorkommen, welchen ich euch jezt vorsagen will. (Hauptsatz:) wenn Ein Apfel Zwei Kreuzer kostet: (Schlußsatz) so kosten drei Aepfel sechs Kreuzer". Wie viel Zahlen kommen in diesen beiden Sätzen vor? K. 4. L. nähmlich in dem ersten oder Hauptsatze „Ein Apfel kostet zwei Kreuzer" kommen wie viele Zahlen vor? K. 2. L. und in dem Schlußsatze „folglich kosten 3 Aepfel 6 Kreuzer"? K. Auch 2 Zahlen. L. Diese 4 Zahlen heißt man auch die vier Glieder. Wenn ich nun sage: „für 1 Kreuzer bekommt man auf dem Markte 10 Kirschen; wie viel Kirschen bekommt man für 2 Kreuzer" wie viele Zahlglieder sind vorgekommen? K. Drei. L. Und welches Zahlglied fehlt noch? K. Das vierte. L. Kannst du dieses fehlende vierte Zahlglied finden? Wie viele Kirschen bekommst du für 2 Kreuzer, wenn man für 1 Kreuzer 10 Kirschen bekommt? Wie vielmahl 1 Kreuzer

zer sind 2 Kreuzer? Wie vielmahl 10 Kirschen mußt du folglich bekommen? K. 2 Mahl 10, oder 20 Kirschen. L. Jetz will ich euch die beiden ersten Glieder zu einigen andern Rechenschlüssen geben, die ihr nachmachen sollt. Wenn Eine Henne alle Tag Ein Ei legt, wie viele Eier legt sie — Sag du, Karl das dritte Glied gild, in 1 Woche oder 7 Tagen, 1 Monat oder 30 Tagen? K. wenn eine Henne alle Tage ein Ei legt, wie viel Eier legt sie in einer Woche oder 7 Tagen? L. Johann! du sollst das vierte Glied finden! J. 7 Eier. L. Warum? J. Weil 1 Woche 7 Mahl 1 Tag ist, so muß folglich die Henne 7 Mahl 1 Ei oder 7 Eier legen. L. Aber die Hennen legen nicht alle Tage 1 Ei, sondern nur etwa die Woche in Sommer hindurch 3 bis 4 Eier. Wenn nun diese Henne in 1 Woche 3 Eier legt, wie viel legt sie in 3. 4. 5. 6. Wochen? L. deine Schwester wird mit 10 frisch gelegten Eiern nach der Stadt geschickt. Wie viel Geld muß sie der Mutter bringen, wenn daselbst ein Ei 1 Kreuzer, wenn 1 Ei 2. 3. 4. 5. Kreuzer kosten würde? ꝛc. L. Wie heißen die vier Zahlglieder in deinem letztern Rechenexempel? K. 1, 5, 10, 50. L. Welches Zahlglied wurde von dir gesucht und dann auch gefunden? K. das vierte.

§. 56.

Von dem Verhältnisse der Zahlglieder unter einander.

L. Wie verhält sich 1 zu 5? K. (Keine Antwort) L. Ja so, ich habe auch noch nicht gesagt, was dieß heißt.

So

So merkt denn auf! Wenn man fragt, wie sich eine Zahl oder Zahlgröße zu einer andern verhält, so will man wissen, wie viel Mahl die eine größer als die andere sey. Welche von beiden Zahlen ist denn größer 1 oder 5? K. 5. L. Wie verhält sich denn 1 zu 5, oder wie viel Mahl ist das zweite Zahlglied größer als das erste? K. Fünf Mahl. L. Wie verhält sich denn 10 zu 50? K. 50 (oder 5 Zehner) ist 5 Mahl so groß als 10. L. Unser leztes Rechenexempel enthielt eben diese Gliederpaare, denn es hieß „wenn 1 Ei 5 Kreuzer kostet, so kosten 10 Eier 50 Kreuzer". Wie verhalten sich das Gliederpaar in dem Hauptsatze und wie in dem Schlußsatze? K. Ganz gleich. L. Beweiset es! K. 5 ist fünf Mahl 1 und 50 ist 5 Mahl 10. L. Wenn 1 Apfel 2 Kreuzer kostet, so kosten 10 Aepfel wie viel? K. 20. L. Wie verhält sich denn auch hier wieder in jedem Satze die zweite Zahl zu der ersten? K. Die zweite Zahl ist noch 1 Mahl so groß wie die erste. L. Muß denn dieß immer so seyn? K. (Keine Antwort.) L. Sagt mir doch, wenn 1 Stück Apfel 2 Kreuzerstücke oder noch 1 Mahl so viel Geldstücke als Obststücke kosten, wie viel müssen denn 10 Aepfel kosten? K. Auch noch 2 Mahl so viel. L. Wenn 1 Apfel 3 Kreuzer oder 3 Mahl so viel kostet, wie viel Mahl mehr müssen 10 Aepfel kosten? K. Auch 3 Mahl so viel, oder 30. L. Wenn 1 Apfel 4 Kreuzer oder 4 Mahl so viel kostet, wie viel Mahl mehr müssen dann auch 10 Aepfel kosten? (u. s. w. mit noch einigen größern Zahlen) L. Wie viel Mahl mehr müssen folglich nothwendiger weise 10 Aepfel kosten? K. So viel Mahl mehr, als

als 1 Apfel Kreuzer kostet. L. Um also das vierte Zahlenglied geschwind zu finden, auf welches Verhältniß dürfen wir nur sehen? K. Auf das Verhältniß der beiden Glieder im ersten Paare. L. Wie dürfen wir dann vom dritten auf das noch unbekannte vierte Glied schliessen? K. Wie sich das 1 Glied zum zweiten verhält, so verhält sich das dritte zum vierten. L. Wenn das zweite Glied noch ein Mahl so groß ist, als das erste, so mußte auch das vierte noch ein Mahl so groß seyn, als das? K. Dritte. L. Und wenn das zweite Glied 2. 3. 4. 5. ꝛc. Mahl so groß ist, so muß das vierte — wie oft Mahl größer seyn als das dritte? K. Auch 2. 3. 4. 5. ꝛc. Mahl. L. Wenn 1 Apfel 10 Kreuzer kostet, so müssen 10 Aepfel kosten? K. 100 oder 10 Mahl so viel Kreuzer als Aepfel. L. Und wenn 1 Apfel 6 kostet, wie viel kosten 3 Aepfel ꝛc.

§. 57.

Rechenschlüsse mit einem größern zweiten Zahlengliede, das in dem erstern aufgeht.

L. Wer sagt mir, wie sich folgende Zahlenpaare zusammen verhalten: 2:4? (2 zu 4) K. 4 ist noch ein Mahl so groß. L. 2:6? (3 Mahl so groß); 2:8? 2:10? 3:6? 3:9? 3:12? 3:15?; 4:8? 4:12? 4:16? 4:20?; 5:10? 5:15? 5:20?; 6:12? 6:18? 6:24? 6:30?; 7:14? 7:21? 7:28? 7:35?; 8:16? 8:24? 8:32? 8:40? 9:18? 9:27? 9:36?; 10:20? 10:30?

L. Wer von euch getraut sich nun auch zu der dritten Zahl die vierte zu finden, die zu jener in demselben Verhält-

hältnisse steht, wie die erste zur zweiten? K. (Die fähigen rufen alle: ich, ich! oder strecken zum Zeichen, daß sie es vermögen, die Hand in die Höhe.) L. So gebt denn acht! Wie sich 2:4 = 3? (wie sich 2 zu 4 verhält, so verhält sich 3 zu?) K. 6. L. Beweis! K. 4 ist 2 Mahl 2, und 6 ist auch 2 Mahl 3. L. Wenn 2 Aepfel 6 Kreuzer kosten, wie viel kosten 3 Aepfel? K. 9. L. Beweis. K. 6 = 3 × 2. und 9 = 3 × 3. L. Wenn 2 Aepfel 8 Kreuzer kosten, wie viel kosten 3 Aepfel? K. 12. Kreuzer, denn 12 ist eben so oft 4 Mahl 3, als 8 Mahl 2 ist, nähmlich 4 Mahl. L. Wenn 2 Eier 10 Kreuzer kosten, was kosten denn 3 Eier? K. 15 Kreuzer, denn 15 = 3 × 5 und 10 ist auch 2 × 5. L. Wer weiß mir die vierte Zahl zu 4 zu finden, die mit dieser in gleichem Verhältnisse steht, wie 3 : 6? K. 8. L. Beweis! K. 6 ist noch ein Mahl so viel als 3, und 8 noch ein Mahl so viel als 4. L. Wer findet zu 5 die vierte Zahl in demselben Verhältnisse? K. 10. L. Wie sich 3:9 verhält, so verhält sich 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zu? K. (6. 9. 12. 15. 21. 24. 27. 30.) L. Beweis! rc.

L. Wie sich verhält 4:8 = 11? K. 22. L. Beweis. K. 22 ist 2 Mahl so viel als 11, so wie auch 8 zwei Mahl so viel ist als 4. L. Welche Zahl nimmst du zur Multiplication mit 4, um das zweite Zahlenglied 8 zu erhalten? K. 2, denn 2 × 4 = 8. L. Und wenn du das 3te Zahlenglied 11 mit 2 multiplizirst, so erhälst du die vierte gesuchte Zahl? K. 22. L. Wie findest du aber geschwind die Zahl, mit welcher du sowohl die erste Zahl 4 multipli-

pliciren mußt, um 8 zu erhalten, als auch die zweite um 22 zu erhalten? K. Ich dividire 4 in 8.

Anm. Viele Lehrer wußten bisher den Grund ihres mechanischen Verfahrens nicht, warum die erste mit der zweiten dividirt, und mit der Summe sodann die dritte multiplizirt, oder was ganz eins ist, warum das dritte mit dem zweiten Glied multiplizirt, und zuletzt das Erste in die Summe dividirt werden mußte.

L. Wie sich 4:12=11? K. 33. L. Setze immer den Beweis hinzu, daß 33 eben so viel Mahl 11 sey, als 12 Mahl 4? K. 3 × 4 = 12 und 3 × 11 = 33. L. Wie sich 4:16=11? K. 44, denn 4 × 4 = 16 und 4 × 11 = 44. L. Wie sich 4:20=11? 4:24=11? 4:28=11? 4:32=11? 4:40=11?

L. Wie sich 5:10=12? 5:15=12? 5:20=12? 5:25=12? 5:30=12? ꝛc.

L. Wie sich 6:12=13? 6:18=13? 6:24=13? 6:30=13? ꝛc.

L. Wie sich 7:14=14? 7:21=14? 7:28=14? 7:35=14? ꝛc.

L. Wie sich 8:16=15? 8:24=15? 8:32=15? 8:40=15? ꝛc.

L. Wie sich 9:18=16? 9:27=16? 9:36=16? ꝛc.

L. Wie sich 10:20=18? 10:30=18? 10:40=18? 10:50=18? ꝛc.

§. 57.

§. 57.

Rechenschlüsse mit wachsendem Verhältnisse und ungleichen Zahlen.

L. Wie verhält sich 2 zu 3, oder wie viel mahl ist 3 größer als 2, oder wie oft Mahl ist 2 in 3 enthalten? K. 1 und ein halb Mahl. L. 2:5? 2:7? 2:9?; 4:6? 4:10? 4:14? 4:18?; 6:15? 6:21? 6:27?; 6:33?

Anm. Wir können durchaus nicht rathen, bei dem ersten Kursus sich auf größere Bruch- oder Theilzahlen als das Halbe einzulassen, da die Schüler mit leztern erst später bekannt gemacht werden. Man verspare daher dieß tiefere Eingehen in das Schlußrechnen bis zum zweiten Kursus, wo die Schüler die Zahlen in Ziffern vor sich hinstellen und sich nicht mehr mit dem Behalten derselben belästigen dürfen. Will man aber doch vielleicht noch die Theilzahlen von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{10}{10}$ auf das Schlußrechnen im ersten Kursus schon anwenden, so muß man den lezten Abschnitt, welcher das Rechnen mit Theilzahlen enthält, vor dem gegenwärtigen Abschnitte vornehmen, wie in der Münchner Anweisung für Lehrer geschehen ist.

L. Wenn 2 Aepfel 3 Kreuzer kosten, wie viel mußt du für 10 Aepfel zahlen? K. 15. L. Beweis! K. 3 ist 1 und ein halb Mahl so viel als 2, und 15 ist auch 1 und ein halb Mahl so viel als 10. L. Oder 2 und ein halb Mahl zwei ist 3, und 10 und ein halb Mahl 10 (= 5) ist? K. 15. L. Wenn du für 2 Kreuzer 5 Bir-

nen

nen bekommst, wie viel bekommst du für 8 Kreuzer? K. 2 ist in 5 zwei und ein halbmahl enthalten; 2 mahl 8 =16 und ein halb Mahl 8 ist 4; 4 aber und 16=20. L. Wenn 2 Zitronen 7 Kreuzer kosten, wie viel kosten 6 Zitronen? K. 7 ist 3 und ein halb Mahl 2; 3 und ein halb Mahl 6 ist 21. L. 2 junge Tauben kosten 9 Kreuzer, was kosten 12? K. 9 ist 4 und ein halb Mahl 2; 4 Mahl 12=48 und ein halb Mahl 12 oder 6 zu 48 ist 54. L. Wenn 4 Häringe 10 Kreuzer kosten, was kosten 24 Stück? K. 10 ist 2 und ein halb Mahl 4; 2 Mahl 24 ist 48; und die Hälfte von 24 ist 12; hierzu 48 ist 60 Kreuzer. L. Wenn 4 Ellen Band 14 Kreuzer kosten; was kosten 30 Ellen? K. 14 ist 3 × 4 und ein halb Mahl vier; 3 × 30=90; und 15 als die Hälfte von 30 dazu ist 105. L. Was kostet aber eine Elle Band, wenn 4 Ellen 14 kr. kosten? K. (Vielleicht keine Antwort. L. Wie viel Mahl ist 14 mehr als 4?) 14 ist 3 und ein halb Mahl 4. L. Wie viel ist die Hälfte von 1 Kreuzer? K. $\frac{1}{2}$. L. Und 3 dazu? K. $3\frac{1}{2}$.

Anm. Diese Uebungen können mit allen folgenden Zahlen 6. 8. 10. als ersten Zahlengliedern und den ihnen entsprechenden größern zweiten Zahlgliedern durchgemacht werden.

§. 58.

Einige Exempel von dem bisherigen Schlußrechnen in unsystematischer Folge.

1. Wenn 12 Obststücke (Aepfel, Birnen, Zitronen) 24 Kreu-

Kreuzerstücke kosten, was kosten 36? 24 ist 2 ⋈ 12 und 2 Mahl 36 = 72.

2. Wenn 10 Klafter Holz 45 fl. kosten, was kosten 14 Klaftern? 45 ist 4½ Mahl 10. 4 ⋈ 14 = 56 + ein halb Mahl 14 (= 7) 63.

3. 4 Taglöhner machen täglich 6 Klafter Holz, wie viel Klaftern Holz werden 30 Taglöhner täglich machen? 45 denn 6 ist 1 und ½ Mahl 4; und 1 und ½ 30 ist 45.

4. Wenn vier Taglöhner in 4 Tagen 24 Klafter Holz machen, wie viel werden sie in 30 Tagen verfertigen? 24 = 6 ⋈ 4; 6 ⋈ 30 = 180 Klafter.

5. Wenn 10 Eier 15 Kreuzer kosten, wie viel kosten 48? 15 = 1½ ⋈ 10; 1½ ⋈ 48 = 72.

6. Zu 3 Kanonenschüssen werden 15 Pfund Pulver erfordert, wie viel gehören zu 200 Schüssen?

7. 15 Ellen Tuch kosten 45 fl. wie viel kosten 21 Ellen?

8. 4 Morgen Land geben 14 fl. Pacht, was würden 31 Morgen eintragen? 14 = 3½ ⋈ 4; 3 ⋈ 31 = 93; ½ ⋈ 31 = 15½; 93 + 15½ = 104½ fl.

§. 59.

Rechenschlüsse mit einem kleinern zweiten Zahlengliede, das in das erste aufgeht.

Lehrer. Wer sagt mir, wie verhalten sich die beiden Zahlglieder 2 und 4 zu einander? K. Die zweite Zahl ist zwei Mahl so groß wie die erste. L. Wenn ich aber sage, wie verhält sich 4 zu 2, wie werdet ihr da antworten? (Vielleicht keine Antwort. Ist hier die zweite

te Zahl auch größer als die erste?) K. die erste ist zwei Mahl so groß wie die zweite) L. folglich ist die zweite gegen die erste gehalten? K. um die Hälfte kleiner. L. Wenn ich noch zwei Zahlglieder hinzufüge, um einen Rechenschluß zu bilden, wie müssen sich diese zu einander verhalten? K. die lezte muß auch um die Hälfte kleiner seyn, als die Dritte. L. Wenn also 4 Aepfel 2 Kreuzer kosten, wie viel kosten 10 Aepfel? K. 5 Kreuzer, weil 5 die Hälfte von 10 eben so ist wie 2 von 4. L. Was kosten bei demselben Preise 14 Aepfel? (7 Kreuzer) 30? 42? 70? 100? L. Wenn 3 Aepfel 9 Kreuzer kosten, wie viel kosten 6 Aepfel? K. 2 denn ist 3 Mahl weniger als 3 und 2 ist 3 Mahl weniger als 6. L. Wie viel kosten alsdann 9. 12. 15. 18 Aepfel.

L. Wenn 10 Aepfel nur 2 Kreuzer kosten, so ist das zweite Glied wie oft Mahl weniger als 10? K. 5 Mahl. L. folglich müssen 15 Aepfel (20. 30. 35. rc.) kosten? K. Auch 5 Mahl weniger oder 3 (4. 6. 7.)

L. Wenn 8 Aepfel 2 Kreuzer kosten, so sind dieß wie viel Mahl Kreuzerstücke weniger als Aepfelstücke? K. 4 Mahl weniger. L. Wenn du nun 10 Aepfel kaufst, wie viel Mahl weniger Kreuzerstücke muß du zahlen? K. 4. L. Was ist der vierte Theil von 4? K. 1. L. von 8? K. 2. L. Der vierte Theil von 2? K. Ein halbes. L. $1 + 1 + \frac{1}{2}$? K. $= 2\frac{1}{2}$ Kreuzer.

§. 60.

Von Versetzung der drey Zahlglieder.

L. Wenn 1 Apfel 2 Kreuzer kostet, wie viel kosten 10 Aepfel? K. 20 Kreuzer. L. Wie viel sind Zahlglieder

der in diesem Rechenschlusse? K. 4. L. Wie kann er deswegen genannt werden? Ein viergliedriger. L. Es gibt auch mehr gliedrige, die ihr späterhin kennen lernen sollt. Hier haben wir nur mit einfachen oder vier gliedrigen zu thun. Welches Glied fehlte uns noch, als wir zu rechnen anfingen? K. das vierte. L. Wie fanden wir solches? Was suchten wir zwischen den beiden ersten Zahlgliedern auf? K. Das Verhältniß der ersten Zahl zu der zweiten. L. Und schloßen dann, wie sich die erste Zahl zu der zweiten verhält, so muß sich verhalten? K. Die dritte zur vierten. L. Was heißt das aber, die eine Zahl verhält sich zu der andern? K. Die erste ist um so viel größer als die andere. L. kann denn nicht auch die zweite Zahl kleiner seyn? K. Ja, sie kann auch kleiner als die erste seyn. L. Wie müssen wir also bei einem Rechenschluße von vier Zahlgliedern schließen? K. So viel größer oder kleiner die erste Zahl gegen die zweite ist, so viel größer oder kleiner muß auch die vierte Zahl gegen die dritte seyn. L. Haben wir denn vorhin auch so geschlossen, als wir sagten: wenn 1 Apfel 2 Kreuzer kostet, so kosten 10 Aepfel 20 Kreuzer? K. Ja, denn 2 ist 2 Mahl 1. und 20 ist 2 Mahl 10.

L. Wie wurde denn in unserm Rechnungsexempel das erste Zahlglied, die Eins benannt? K. Aepfel. L. Das zweite? K. Kreuzer. L. Das dritte? K. Aepfel. L. Das vierte? K. Kreuzer. L. Welche Glieder haben einerlei Benennungen? K. Das erste und das dritte, und das zweite und das vierte. L. Lassen sich denn die vier Glieder nicht auch anders stellen, und so, daß ei-

nerlei benannte Zahlen beisammen stehen? (Keine Antwort, weil die Frage nicht diese, sondern nur Erregung der Aufmerksamkeit bezweckte.) Laßt uns den Versuch machen!

L. Im ersten Gliede nannten wir wie viel Aepfel? K. 1 Apfel. L. Und im dritten Gliede? K. 10 Aepfel. L. Wie viel sind bei der letztern Zahl mehrere Aepfel? K. 10. L. Wenn ich zehn Mahl mehr Aepfel als bloß nur einen kaufe, wie viel Mahl mehr Geld muß ich dafür zahlen? K. Auch zehn Mahl mehr Kreuzer. L. Wenn ich nun für 1 Apfel 2 Kreuzer gezahlt habe, und 10 Mahl mehr Aepfel gekauft habe, so muß ich auch wie oft Mahl 2 Kreuzer zahlen? K. 10 Mahl. L. Wie viel ist 10 Mahl 2 Kreuzer? K. 20. L. Also lautet unser Rechenschluß nach dieser Zusammenstellung der Zahlglieder, welche einerlei Nahmen führen? K. 1 : 10 = 2 : 20. L. Oder wie sich 1. (Apfel) zu 10 (Aepfel) verhält, so verhalten sich auch 2 (Kreuzer) zu 20 (Kreuzer.)

L. Wenn 2 Aepfel 6 Kreuzer kosten, was kosten 10 Aepfel? Stellt diese 3 Glieder vorher nach einerlei Nahmen zusammen, und sprecht, wie sich verhält? K. 2 Aepfel zu 10 Aepfel, so verhält sich 6 zu der noch unbekannten Zahl. L. Nun verhält sich 2 zu 10 wie? Oder die zweite ist wie oft Mahl größer als die erste? K. 5 Mahl. L. Also müssen dafür auch wie oft Mahl 6 Kreuzer gezahlt werden? K. 5 Mahl. L. 5 + 6 Kreuzer aber sind? K. 30.

L. Ein Schaf kostet 5 fl; nun möchte ich wissen, wie viel eine ganze Heerde von 100 Schafen kostet. Johann, rechne es auf unsere erste Art auf, nach welcher wir also diese drei benannten Zahlen unter einander stehen lassen. Wie viel größer ist das zweite Zahlglied als das erste? J. 5. L. folglich kosten 100 Schafe? J. 5 Mahl so viel oder 500. L. Du Philipp rechne es mir auf eine andere Art aus, nach welcher du die gleichbenannten Zahlen zusammensetzst und sprichst, so viel mehr Schafe da sind, so viel Mahl 5 fl. muß ich dafür zahlen. Nun sind? Ph. 100 Mahl mehr als 1 Schaf vorhanden, so muß ich folglich auch 100 Mahl 5 fl. zahlen. L. 100 + 5 fl. sind? Ph. 500 fl.

L. Ich weiß eine Stadt, wo in 1 Woche im Durchschnitte 2 Menschen sterben; nun ich möchte wissen, wie viel Menschen daselbst in einem Jahre oder 52 Wochen sterben. Wer rechnet es uach der ersten Art aus? K. Wenn 2 Mahl so viel Menschen sterben, als die erste Zahl beträgt, so müssen in einem Jahr auf 2 Mahl 52 oder 104 Menschen sterben. L. Wer rechnet es nach der zweiten Art aus? K. 52 Wochen sind 52 Mahl 1 Woche; und 52 Mahl 2 Menschen sind 104.

L. Von 100 fl. Darlehn erhält man gewöhnlich 5 fl. Zinsen. Es hat jemand 10 Mahl 100 oder 1000 fl. und möchte wissen, wie viel er davon Zinsen zu erhalten hat. Wer rechnet es auf die erste Art? Die zweite Zahl (5) ist wie viel Mahl weniger als die erste (100)? K. 20. L. Ist es gewiß? K. Ja, denn 20 × 5 = 100. L. Und 20 Mahl weniger als 1000 fl. ist? (Wahrscheinlich keine

Antwort) Wie viel ist 10 Mahl weniger als 1000 oder 10 Hundert? K. 100. L. Und davon die Hälfte? K. 50. L. Wer rechnet es auf die zweite Art? Aber hier haben wir 3 Geldzahlen, welche werden zusammen gehören, die Kapitalien und die Zinsen? K. Die Kapitalien zusammen, und dann eben so die Zinsen. L. Wie verhalten sich denn die Kapitalien zusammen? K. 1000 fl. sind 10 Mahl mehr als 100 fl. folglich muß man von 1000 fl. auch 10 Mahl mehr Zinsen als von 100 fl. bekommen. Von 100 fl. bekommt man 5 fl. folglich von 1000 fl. 10 × 5 oder 50 fl. L. Wenn man aber von 100 fl. nur 4 fl. Zinsen erhält, wie viel tragen dann 1000 fl.? K. 10 × 4 = 40. L. Und wenn nur 3 fl. von 100 gezahlt werden? K. 10 × 3 = 30.

L. Wenn 2 Eier 5 Kreuzer kosten, wie viel kosten 20 Eier? Nach der ersten Art? K. 5 ist 2 und ½ Mahl 2, 2 × 20 = 40 + ein halb Mahl 20 = 10; 40 = 10 = 50. L. Und nach der zweiten Art berechnet? K. 20 Eier sind 10 Mahl 2 Eier, und 10 × 5 Kreuzer sind 50.

L. Wenn aber 5 Eier 2 Kreuzer kosten, wie viel kosten 20 Eier nach der zweiten Rechnungsart? K. 20 Eier sind 4 × 5 Eier; 4 × 2 = 8 Kreuzer.

L. 2 Reichs Thaler machen 3 fl. rheinisch aus, wie viel machen 100 Thaler Gulden nach der ersten Art? K. 3 ist 1 und ein halb Mahl so viel als 2; 1 und ½ Mahl 100 ist 100 und 50 = 150. L. Nach der zweiten Rechenart? K. 100 Thaler sind 50 Mahl 2 Thaler; 50 Mahl 3 fl. sind 150 fl.

L.

L. Wenn 3 fl. 2 Thaler ausmachen, wie viel machen 150 fl. nach der ersten Art? K. 2 ist um 1 Drittel weniger; 1 Drittel weniger als 150 fl. ist 100. L. Nach der leichtern zweiten Art? K. 150 fl. sind 50 Mahl 3 fl., und 50 Mahl 2 Thlr. sind 100 Thlr.

L. 5 Ellen Band kosten 10 Kreuzer, was kosten 25 Ellen, nach der ersten Art? K. 10 (Kreuzer) ist zwei Mahl 5 (Ellen;) und $2 \times 25 = 50$ Ellen. L. Nach der zweiten Art? K. 25 Ellen sind 5 Mahl 5 Ellen; und 5 Mahl 10 Kr. sind 50.

Anm. Man übersehe nicht, daß die Absicht bei dieser schließenden Rechenübung sich nur darauf beschränkt: einmahl, die Denkkraft überhaupt zweckmäßig zu üben; zweitens die Kinder über die Gesetze des Denkens zu verständigen, welche bei der Regel Detri oder dem Schlußrechnen zu Grunde gelegt werden, keines Weges aber sie jezt schon dahin zu befähigen, schwerere Rechen Aufgaben zu lösen, die für spätere Zeiten aufzusparen sind, wenn die Schüler theils die Theilzahlrechnung schon begriffen haben, ohne welche eine Menge von Schlußrechnungen nicht leicht gelöst werden können; theils wenn sie zu dem symbolischen Rechnen fortgeschritten sind, und mithin durch Ziffern die vielen bei den schweren Aufgaben des Schlußrechnens vorkommenden Zahlen besser vesthalten können, als solches durch das bloße Gedächtniß möglich ist.

V.

V.

Vom Rechnen mit Theilzahlen.

§. 61.

a) Vorerinnerung.

Bisher rechneten die Kinder mit Zahlen, die eine für sich bestehende Größe vorstellten, wie z. B. 1. 6. 12. 60., jezt sollen sie durch die Kraft ihres Geistes auch Zahlen handhaben lernen, die bloß die gleichen Theile einer gewissen Größe bezeichnen, und daher Theilzahlen genannt werden, z. B. 1 Drittel, 2 Viertel, 6 Sechstel. Die Größe, von welcher hier eine gewisse Anzahl von gleichen Bestandtheilen angegeben wird, nennen wir das Theilganze. 1 Drittel ist die Theilzahl von einem Theilganzen, das in 3 gleiche Theile getheilt ist; 2 Viertel ist die Theilzahl von einem Theilganzen, das aus 4 gleichen Theilen besteht; 6 Sechstel ist eine Theilzahl von einem Theilganzen, das aus 6 gleichen Theilen besteht. — Alles kommt hierbei wieder zuerst bloß darauf an, daß die Kinder diese Theilzahlen richtig übersehen oder ordnen (numeriren) und daß sie solche auch ponderiren, oder ihre Größe und Verhältniße richtig ermessen oder auffassen lernen. —

Sind

Sind die Theilzahlen gleichartig, so hat es gar keine Schwierigkeit, weil es völlig einerlei ist, wie sie genannt werden, ob Halbe, Drittel, Achtel; so wie es einerlei ist, ob in der Rechen Auflösung 2+3=5 die Zahl 2 und 3 Eier, Aepfel, Gulden, Kreuzer heißen, oder Drittel, Viertel: denn 2+3 Drittel, oder Viertel, oder Aepfel, oder Kreuzer sind 5 Drittel, oder Viertel, oder Aepfel, oder Kreuzer. Die weitere Schwierigkeit besteht blos darinn, da sich zum Zwecke des Rechnens nur Gleiches mit Gleichen zusammen fassen und so auch von einander scheiden läßt, das Ungleiche in Gleiches aufzulösen. Um z. B. 8 Zwölfer, 8 Vierundzwanziger, 8 Sechserstücke zusammen zählen zu können, muß ich sie unter einerlei Benennung bringen, und z. B. sagen 8 Vierundzwanziger sind 16 Zwölfer, und 8 Sechser sind 4 Zwölfer, mithin beträgt die Summe 28 Zwölfer. Geben die Lehrer auf diese Vorübungen und auf diese Schwierigkeit gehörig Acht, so wird ihnen der Unterricht in dieser Rechnungsart eben so leicht als ihren Schülern nützlich werden.

§. 62.

b.) Hülfsmittel.

Da wir hierbei ganz von vornen wieder anfangen und daher von einer sinnlichen Anschauung (den sinnlich dargestellten Theilzahlen) auszugehen haben, so müssen wir uns wieder nach einem einfachen Hülfsmittel umsehen. Das Einfachste ist die Linie, die schon früher hin von

Pä-

Pädagogen gebraucht wurde (S. Trapp's Pädagogik S. 410. Berlin 1780,) und die von jedem Lehrer leicht an die schwarze Schultafel oder von den Schülern leicht auf ihre Steinpappe gezeichnet werden kann. Doch bleibt es den Lehrern anheim gestellt, ob sie lieber das von Pestalozzi dafür aufgestellte Quadrat nehmen wollen. Von den erstern sind zehen zu bilden, um die Theilganzen von 1 bis $\frac{10}{10}$ vorzustellen; von leztern aber nur fünf, nähmlich das Quadrat durch 1. 2. 4. 5 und 7 senkrechte Linien getheilt, die durch horizontale Linien verdoppelt werden können. Nur bitten wir die Lehrer nicht aus der Acht zu lassen, daß es nicht sowohl auf das Hülfsmittel ankommt, als darauf, daß die Schüler den **Begriff von Theilzahlen und Theilganzen** daran deutlich auffassen lernen.

§. 63.

c) Methodisches Verfahren.

Auch hierbei muß der höchste Grundsatz der Unterrichtskunst in Anwendung gebracht werden, daß die Selbstkraft der Schüler sich an diesem Lehrstoffe zweckmäßig ausbilden soll. Die Leztern müssen daher selbst die Theilzahlen ordnen, ponderiren, binden, trennen, und sie als Theile eines Rechnungsschlußes behandeln lernen.

Das sinnliche Hülfsmittel, welches dabei gebraucht wird, darf nicht länger angewendet werden, als bis die Schüler einen deutlichen Begriff von jeder Theilzahl in ihrem Kopfe zu bilden gelernt haben.

Uebri-

Uebrigens ist die hier vorgeschriebene Stufenfolge nicht nur genau zu beobachten, sondern auch von der niedern zu der höhern nicht eher fortzuschreiten, als bis die Kraft sich in der vorhergehenden genugsam entwickelt und befähigt hat.

§. 64.

d) Numeriren oder Ordnen der Theilzahlen.

Zufolge des vorhin aufgestellten Grundsatzes müssen von den Schülern selbst die Theilzahlen nach der bereits von ihnen aufgestellten Zahlenordnung gebildet werden. Zu dem Ende ziehe man an der schwarzen Wandtafel zehn gleich lange senkrechte Linien, und fordere die Schüler auf, solche in steigender Ordnung von der zweiten Linie an in 2 bis 10 Theile zu theilen. Man bediene sich dabei entweder eines hölzernen Zirkels, der in jeder Schule seyn soll, oder besonderer Stäbe, welche die nöthigen Abtheilungen enthalten, um solche sogleich auf seine gezogenen Linien überzutragen. Der Lehrer kann zu diesem Geschäfte einen Schüler um den andern hervortreten lassen, oder selbst das Werkzeug seiner Schüler seyn, indem er sie auffordert, ihm zu sagen, was er thun müsse, um die zweite Linie in zwei gleiche Theile zu zerschneiden. Sie werden ihm sagen; er müsse in der Mitte einen Querstrich ziehen. Der Lehrer thut es in ihrem Nahmen, verlangt aber zu wissen, warum denn in der Mitte der Linie, und warum nicht etwas rechts oder links?

Hierauf fährt der Lehrer fort, ohngefähr auf folgende Weise mit ihnen sich zu unterreden.

Lehrer: In wie viele Theile haben wir die ganze zweite Linie getheilt? K. in zwei gleiche Theile. L. Wie heißt ein Theil dieses Theilganzen? K. Ein Halbes. L. Aus wie vielen bestehet dieß Theilganze? K. Aus 2 Halben. L. 2 Halbe machen aus? K. Ein Ganzes. L. In wie fern diese Linie aus Theilen besteht, nennt man sie ein Theilganzes oder ein aus Theilen bestehendes Ganze. Ist die erste von uns ungetheilt gelassene Linie auch ein Theilganzes? K Nein. L. sondern was denn? K. Ein Ganzes. L. Die zweite Linie aber ist? K. Ein Theilganzes. L. Warum? K. Weil das Ganze aus Theilen besteht. L. Und wie nennt man die erste Linie? K. Ein Ganzes. L. Warum? Weil es nicht aus Theilen besteht.

L. Wie viele Halbe werden zu einem Theilganzen erfordert? K. 2 Halbe. L. 2 Halbe machen aus? K. Ein Theilganzes. L. 4 Halbe machen aus? K. 2 Theilganze. L. 3 Halbe machen aus? K. Ein Theilganzes und 1 Halbes. L. 4 halbe Gulden machen aus? K. 2 Ganze. L. 3 halbe Gulden? K. 1. Ganzen und 1. Halben. L. 2 halbe Gulden? K. einen Ganzen. L. 5. Halbe machen aus? 6. 7. 8. 9. 10 Halbe machen aus.

§. 65.

Fortsetzung.

L. Die dritte noch ganze Linie wollen wir jezt auch in ein Theilganzes verwandeln, und zwar in ein drei

thei-

theiliges. Wie vielmahl muß ich sie durchschneiden? K. 2 Mahl. L. Wie oftmahl mußten wir die zweite Linie durchschneiden, um eine zweitheilige Größe zu erhalten? K. 1. L. Und um eine Linie von 3 Theilen zu bekommen? K. 2 Mahl. L. Wie viel Theile bekommt denn eine Linie immer mehr, je oft Mahl ich sie durchschneide? K. Immer 1 Theil mehr. L. Wenn ich eine Linie drei Mahl durchschneide, so muß ich folglich bekommen wie viele Theile? K. 4 Theile. ꝛc.

L. Eine Linie 2 Mahl durchschnitten, wird getheilt in? K. 3 Theile. L. Heißt man diese 3 Theile auch Halbe oder Drittel? K. Drittel. L. Warum Drittel? Warum nicht Halbe? ꝛc.

L. Aus wie vielen Dritteln besteht ein Drittel-Ganzes? K. Ein Drittel-Ganzes besteht aus 3 Dritteln. L. Wie viel sind 4 Drittel? 5. 6. 7. 8. 9. 10 Drittel? ꝛc.

L. Ein Halbes, ein Drittel, zwei Drittel sind das Theilganze oder nur Theilzahlen, Theile eines Ganzen? K. Theilzahlen oder Theile eines Ganzen. L. Was ist folglich z. B. Sieben Drittel, eine Theilzahl oder ein Theilganzes? K. Eine Theilzahl. L. Wie heißt aber das Theilganze, von dem ich 7 Theile angegeben habe? K. ein Drittel-Ganzes. L. In wie viel Theile ist das Theilganze getheilt, welches wir ein Drittel-Ganzes nennen? K. In 3. L. Was ist folglich Ein Drittel für ein Theil von einem Ganzen? K. Ein Theil von einem Ganzen, das in 3 gleiche Theile getheilt ist. L. Zwei Drittel? K. Zwei Theile von einem Ganzen, das in drei gleiche Theile getheilt ist. L. Sieben Drit-

Drittel? K. Sieben Theile von einem Ganzen, das in 3 gleiche Theile getheilt ist. L. Wie viel Theile machen ein Drittelganzes aus? K. Drei Drittel. L. Wie viel Drittelganze machen 7 Drittel aus? K. 2 Drittelganze und 1 Drittel.

§. 66.

Fortsetzung.

L. Wie oft muß ich die vierte Linie durchschneiden, um sie in 4 gleiche Theile zu theilen? K. 3 Mahl. L. Wie heißt ein solcher Theil? K. Ein Viertel. L. Aus wie vielen Vierteln besteht ein solches Ganze, dessen Theile man Viertel nennt? K. Aus 4 Vierteln. L. Wie nennt man ein solches Ganze, das aus Vierteln besteht? K. Ein Viertelganzes. L. Wie viel sind 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 Viertel? K. 5 Viertel sind 1 Viertelganzes und 1 Viertel, 6 sind 1 Viertelganzes und 2 Viertel oder ein halbes Viertel-Ganzes; 7 Viertel sind 1 Viertel Ganzes und 3 Viertel. u. s. w.

L. Wie oft muß ich die vierte, fünfte, sechste, siebente, achte, neunte, zehnte Linie durchschneiden, um sie in 5 bis 10 gleiche Theile zu theilen? Wie heißt ein Theil, dessen Ganzes in 5, 6, 7, 8, 9 gleiche Theile zerlegt wurde? Wie viel sind 7, 8, 9, 10 Fünftel, Sechstel, Siebentel, Achtel, Neuntel?

L. Ein Theilganzes, das in 10 gleiche Theile zerlegt wurde, heißt? K. Ein Zehntelganzes. L. Und seine Theile heißen? K. Zehntel. L. Ein Theilganzes, das

in 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 Theile zerlegt wird, heißt? K. Ein Neuntelganzes, ein Achtelganzes, ein Siebentelganzes, ein Sechstelganzes; ein Fünftelganzes, ein Viertelganzes, ein Drittelganzes, ein Zweitelganzes oder ein halbirtes Ganze.

Anm. Zur Probe, ob die Schüler diese Ordnung der Theilzahlen wohl aufgefaßt haben, gibt man ihnen in unsystematischer Reihe die Fragen auf: was ist ein Zwanzigtel, ein Dreiundsechzigtel, ein Hundertel? Wie viel machen 33 Dreißigtel, 50 Zwölftel ꝛc. Ganze aus?

§. 67.

e. Ponderiren.

Nachdem unsere Schüler die Theilzahlen selbst geschaffen und zugleich geordnet haben, müssen sie eben so, wie bei den ganzen Zahlen geschah, vorher noch mit dem Ponderiren dieser neuen Zahlengattung vertraut gemacht werden, ehe man sie im Rechnen mit Theilzahlen übt. Um sie aber dahin zu bringen, die Größe aller Theilzahlen richtig ermessen zu lernen, müssen sie mit folgenden Hauptsätzen der Theilzahlenkunde praktisch bekannt gemacht werden.

§. 68.

I. In je mehr Theile das Ganze getheilt wird, je kleiner werden jene.

L. Aus wie vielen Theilen bestehet die zweite, durch einen Strich halbirte Linie? K. Aus zwei Theilen, die man

man Halbe nennt. L. Wenn ich jedes Zweitel nochmahls in der Mitte durch einen Strich in zwei gleiche Theile theile, so besteht das Theilganze jetzt aus wie vielen Theilen? K. Aus vier Theilen, die man Viertel nennt. L. Sind diese Viertel größer oder kleiner als die Zweitel? K. Sie sind kleiner. L. Um wie viel sind die Viertel kleiner als die Zweitel? K. Um die Hälfte. L. Denn wenn wir den Strich wieder wegnehmen, wodurch wir die Zweitel theilten und zu Viertel machten, so machen die vier Viertel aus? K. Zwei Zweitel. L. Wenn ich 3 Drittel der dritten Linie halbire, so erhalten wir mehr oder weniger Theile? K. Mehrere Theile. L. Und diese Theile sind größer oder kleiner als diejenigen, aus welchen vorher das Theilganze bestand? K. Kleiner. L. Warum? K. Weil aus jedem Drittel zwei Sechstel geworden sind, und zwei Sechstel ein Drittel ausmachen. L. Wenn wir die Sechstel wieder halbiren, was werden diese wieder? K. Wieder um die Hälfte kleiner. L. In je mehr Theile folglich das Ganze getheilt wird, je grösser oder kleiner werden jene? K. Je kleiner werden diese Theile. L. Sagt diesen Satz noch ein Mahl her, um ihn desto besser zu behalten. K. In je mehr Theile das Ganze getheilt wird, je kleiner werden jene.

Anm. 1. Sollten die Antworten der Kinder nicht immer so erfolgen, wie wir der Kürze wegen hier angenommen haben, so setzen wir bei jedem Lehrer nach den bereits ertheilten Aufschlüssen über das methodische Verfahren bei diesem bildenden Rechenunter

terrichte so viel Kunst voraus, jede Frage in mehrere aufzulösen.

2. Nach Auffassung dieses ersten Hauptsatzes der Theilzahlenkunde, wird derselbe an den 10 Linien der Tafel noch auf folgende Weise praktisch durchgegangen.

L. Ein Ganzes ist größer als? K. ein Halbes

Ein Halbes — — — —	Drittel
Ein Drittel — — — —	Viertel
Ein Viertel — — — —	Fünftel
Ein Fünftel — — — —	Sechstel
Ein Sechstel — — — —	Siebentel
Ein Siebentel — — — —	Achtel
Ein Achtel — — — —	Neuntel
Ein Neuntel — — — —	Zehntel
Ein Zehntel — — — —	Eilfter
Ein Eilftel — — — —	Zwölftel ꝛc.
Ein Neunundneunzigtel — —	Hundertel.

3. Zulezt ist noch mit Beispielen aus dem Leben der Versuch zu machen, ob sie diesen ersten Hauptlehrsatz der Theilzahlenkunde wohl gefaßt haben. Z. B. Zwei gleich große Kuchen werden von dem Bäcker für zwei Familien im Orte gebacken, welche die Hausmutter unter ihre Kinder gleich vertheilen soll. Die eine hat 6, die andere 7 Kinder. Welche Kinder bekommen größere Stücke? Was bekommen die erstern von dem Theilganzen? Was die zweiten? — Zwei Kameraden wollten einen Apfel mit einander theilen, es kommt aber noch ein dritter dazu, der gleichen Antheil daran haben will. In welchem Falle

le werden die Theile kleiner? — Was ist mehr, 5 Fünftel oder 5 Achtel?

§. 69.

II. Das Theilganze bleibt sich gleich, es mag in noch so viele Theile getheilt werden, als man will.

Zur klaren Auffassung dieses Satzes werden die Schüler wieder durch Hülfe der Linien gebracht, indem man sie auffordert, irgend eine derselben in so viele Theile zu theilen, als ihnen beliebt, und dabei zu bemerken, ob dadurch zugleich die Linie oder das Theilganze selbst etwa vergrößert oder verkleinert wird.

Die zweite Linie z. B. besteht aus 2 Halben oder $\frac{2}{2}$ (zwei Zweiteln) und diese sind gleich $\frac{3}{3}$ (drei Dritteln), $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{10}{10}$. Würde man sie auch noch weiter theilen, z. B. $\frac{30}{30}$, $\frac{40}{40}$, $\frac{99}{99}$, so bleibt das Theilganze dadurch unverändert.

Nur die Theile sind sich ungleich, welche Theilganzen von verschiedener Größe angehören, wie z. B. $\frac{1}{3}$ ist kein $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ ist kein $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{7}$ ist kein $\frac{1}{10}$. Welche Zahl ist aber unter diesen ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{10}$) Theilzahlen die größte und die kleinste?

§. 70.

III. Werden die Theilzahlen und die Theilganzen gleich vergrößert, so bleiben sich die erstern immer gleich.

a. Im Falle fortschreitender Verdoppelung.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64} = \frac{64}{128} = \frac{128}{256} = \frac{256}{512}$.

Be-

Beweis. Wenn ich bey der zweiten Linie jedes Zweitel wieder theile, so wird das Ganze in Viertel getheilt, wovon zwei gleich sind dem vorigen Halben oder Zweitel.

$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{4}{12}=\frac{12}{24}=\frac{24}{48}=\frac{48}{96}=\frac{96}{192}=\frac{192}{384}.$

b. Im Falle steigender Vermehrung durch die erste Theilzahl.

$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\frac{5}{20}=\frac{6}{24}=\frac{7}{28}=\frac{8}{32}=\frac{9}{36}=\frac{10}{40}.$

$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{3}{15}=\frac{4}{20}=\frac{5}{25}=\frac{6}{30}=\frac{7}{35}=\frac{8}{40}=\frac{9}{45}=\frac{10}{50}.$

$\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{3}{18}=\frac{4}{24}=\frac{5}{30}=\frac{6}{36}=\frac{7}{42}=\frac{8}{48}=\frac{9}{54}=\frac{10}{60}.$

$\frac{1}{7}=\frac{2}{14}=\frac{3}{21}=\frac{4}{28}=\frac{5}{35}=\frac{6}{42}=\frac{7}{49}=\frac{8}{56}=\frac{9}{63}=\frac{10}{70}.$

$\frac{1}{8}=\frac{2}{16}=\frac{3}{24}=\frac{4}{32}=\frac{5}{40}=\frac{6}{48}=\frac{7}{56}=\frac{8}{64}=\frac{9}{72}=\frac{10}{80}.$

$\frac{1}{9}=\frac{2}{18}=\frac{3}{27}=\frac{4}{36}=\frac{5}{45}=\frac{6}{54}=\frac{7}{63}=\frac{8}{72}=\frac{9}{81}=\frac{10}{90}.$

$\frac{1}{10}=\frac{2}{20}=\frac{3}{30}=\frac{4}{40}=\frac{5}{50}=\frac{6}{60}=\frac{7}{70}=\frac{8}{80}=\frac{9}{90}=\frac{10}{100}.$

Anm. 1. Daß auch hierbei auf Gründlichkeit gesehen, und deßhalb den Schülern der Beweis der Gleichheit (z. B. L. warum ist $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$? K. Weil $\frac{2}{8}$ auch der vierte Theil von dem Theilganzen ist) öfters abgefragt werden müsse, versteht sich von selbst.

2. Dagegen dürfte es nöthig seyn, manche Lehrer daran zu erinnern, daß die Schüler, nachdem sie diese Verhältnisse an den Linien richtig aufgefaßt haben, auch ohne dieses anschauliche Mittel alle diese gleichartigen Theilzahlen nochmahls aus dem Kopfe systematisch zu konstruiren haben.

§. 71.

Fortsetzung.

$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\frac{12}{18}=\frac{14}{21}=\frac{16}{24}=\frac{18}{27}=\frac{20}{30}.$

Beweis: Wenn man die Theile des ersten Theilganzen (des Drittelganzen) halbirt, so wird solches in 6 Theile abgetheilt, mithin in ein Sechstelganzes verwandelt, wovon 4 Sechstel ebenfalls zwei Drittel des Ganzen ausmachen. Theilt man das Ganze in 9 Theile, so machen $\frac{6}{9}$ wieder zwei Drittel aus.

$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}=\frac{10}{25}=\frac{12}{35}=\frac{16}{40}=\frac{18}{40}=\frac{20}{50}$.

$\frac{2}{7}=\frac{4}{14}=\frac{6}{21}=\frac{8}{28}=\frac{10}{35}=\frac{12}{49}=\frac{16}{56}=\frac{18}{63}=\frac{20}{70}$.

$\frac{2}{9}=\frac{4}{18}=\frac{6}{27}=\frac{8}{36}=\frac{10}{45}=\frac{12}{54}=\frac{14}{63}=\frac{16}{72}=\frac{18}{81}=\frac{20}{90}$.

$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\frac{18}{24}=\frac{21}{28}=\frac{24}{32}=\frac{27}{36}=\frac{30}{40}$.

$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}=\frac{15}{25}=\frac{18}{30}=\frac{21}{35}=\frac{24}{40}=\frac{27}{45}=\frac{30}{50}$.

$\frac{1}{7}=\frac{6}{14}=\frac{9}{21}=\frac{12}{28}=\frac{15}{35}=\frac{18}{42}=\frac{21}{49}=\frac{24}{56}=\frac{27}{63}=\frac{30}{70}$.

$\frac{3}{8}=\frac{6}{16}=\frac{9}{24}=\frac{12}{32}=\frac{15}{40}=\frac{18}{48}=\frac{21}{56}=\frac{24}{64}=\frac{27}{72}=\frac{30}{80}$.

$\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{9}{30}=\frac{12}{40}=\frac{15}{50}=\frac{18}{60}=\frac{21}{70}=\frac{24}{80}=\frac{27}{90}=\frac{30}{90}$.

$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=\frac{16}{20}=\frac{20}{25}=\frac{24}{30}=\frac{28}{35}=\frac{32}{40}=\frac{36}{45}=\frac{40}{50}$.

$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{12}{21}=\frac{16}{28}=\frac{20}{35}=\frac{24}{42}=\frac{28}{49}=\frac{32}{56}=\frac{36}{63}=\frac{40}{70}$.

$\frac{4}{9}=\frac{8}{18}=\frac{12}{27}=\frac{16}{36}=\frac{20}{45}=\frac{24}{54}=\frac{28}{63}=\frac{32}{72}=\frac{36}{81}=\frac{40}{90}$.

$\frac{4}{10}=\frac{8}{20}=\frac{12}{30}=\frac{16}{40}=\frac{20}{50}=\frac{24}{60}=\frac{28}{70}=\frac{32}{80}=\frac{36}{90}=\frac{40}{100}$.

$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=\frac{30}{36}=\frac{36}{42}=\frac{40}{48}=\frac{45}{54}=\frac{50}{60}$.

$\frac{5}{7}=\frac{10}{14}=\frac{15}{21}=\frac{20}{28}=\frac{25}{35}=\frac{30}{42}=\frac{35}{49}=\frac{40}{56}=\frac{45}{63}=\frac{50}{70}$.

$\frac{5}{8}=\frac{10}{16}=\frac{15}{24}=\frac{20}{32}=\frac{25}{40}=\frac{30}{48}=\frac{35}{56}=\frac{40}{64}=\frac{45}{72}=\frac{50}{80}$.

$\frac{5}{9}=\frac{10}{18}=\frac{15}{27}=\frac{20}{36}=\frac{25}{45}=\frac{30}{54}=\frac{35}{63}=\frac{40}{72}=\frac{45}{81}=\frac{50}{90}$.

$\frac{6}{7}=\frac{12}{14}=\frac{18}{21}=\frac{24}{28}=\frac{30}{35}=\frac{36}{42}=\frac{42}{49}=\frac{48}{56}=\frac{54}{63}=\frac{60}{70}$.

$\frac{6}{9}=\frac{12}{18}=\frac{18}{27}=\frac{24}{36}=\frac{30}{45}=\frac{36}{54}=\frac{42}{63}=\frac{48}{72}=\frac{54}{81}=\frac{60}{90}$.

$\frac{6}{10}=\frac{12}{20}=\frac{18}{30}=\frac{24}{40}=\frac{30}{50}=\frac{36}{60}=\frac{42}{70}=\frac{48}{80}=\frac{54}{90}=\frac{60}{100}$.

$\frac{7}{8}=\frac{14}{16}=\frac{21}{24}=\frac{28}{32}=\frac{35}{40}=\frac{42}{48}=\frac{49}{56}=\frac{56}{64}=\frac{63}{72}=\frac{70}{80}.$

$\frac{7}{9}=\frac{14}{18}=\frac{21}{27}=\frac{28}{36}=\frac{35}{45}=\frac{42}{54}=\frac{49}{63}=\frac{56}{72}=\frac{63}{81}=\frac{70}{90}.$

$\frac{7}{10}=\frac{14}{20}=\frac{21}{30}=\frac{28}{40}=\frac{35}{50}=\frac{42}{60}=\frac{49}{70}=\frac{59}{80}=\frac{63}{90}=\frac{70}{100}.$

$\frac{8}{9}=\frac{16}{18}=\frac{24}{27}=\frac{32}{36}=\frac{40}{45}=\frac{48}{54}=\frac{56}{63}=\frac{64}{72}=\frac{72}{81}=\frac{80}{90}.$

$\frac{9}{10}=\frac{18}{20}=\frac{27}{30}=\frac{36}{40}=\frac{45}{50}=\frac{54}{60}=\frac{63}{70}=\frac{72}{80}=\frac{81}{90}=\frac{90}{100}.$

Anm. Je leichter Lehrer und Schüler die Gleichheit dieser Theilzahlen ermessen lernen, je gewisser ist es, daß sie bisher nach dem ächten Geist meiner Methode verfahren haben, und je sicherer kann man ihnen verbürgen, daß sie die noch übrigen Schwierigkeiten leicht besiegen werden.

§. 72.

IV. Um Theilzahlen gleichnahmig zu machen, darf man nur wechselseitig die Theilzahl und das Theilganze in so viele Theile weiter zerlegen, als das andere Theilganze Theile enthält.

L. Wie viel sind 3 Aepfel und 2 Birnen zusammen? K. (Vielleicht die Antwort) 5. L. Was denn, 5 Aepfel oder 5 Birnen? K. Nein, sondern 5 Obststücke. L. Recht, denn was man zusammen zählen soll, muß entweder einerlei Benennung schon haben, oder unter einerlei Benennung vorher gebracht werden. Sind 3 Aepfel und 2 Birnen einerlei Dinge? K. Nein, verschiedene Dinge. L. Was kann man mit Dingen nicht, die verschieden sind, und die deßwegen auch einen verschiedenen Nahmen führen? K. Man kann sie nicht zusammen zäh-

 len.

len. L. Deßwegen konntest du auch vorhin nicht 3 Aepfel und 2 Birnen zusammen zählen, und sagen es wären 5 Aepfel oder 5 Birnen, sondern du mußtest beide verschiedene Dinge erst unter was bringen? K. Unter einerlei Benennung bringen. L. Und diese Benennung heißt? K. Obststücke. L. 3 und 2 Obststücke sind? K. 5 Obststücke. L. 3 Aepfel und 2 Birnen sind wie viel Aepfel oder Birnen? K. Man kann sie nicht zusammenzählen, weil es verschiedenartige Dinge sind.

L. Sieh hin auf diese Linien an der schwarzen Wandtafel. Diese zweite stellt ein halbirtes Theilganze vor, welches man nennt? K. Ein Zweitelganzes. L. Was stellt die dritte Linie vor? K. Ein Drittelganzes. L. Warum führt es diesen Nahmen? K. Weil es aus 3 Theilen besteht. L. Ist ein Zweitel und ein Drittel einerlei Nahme? K. Nein, ein verschiedener Nahme. L. Da ein Zweitel ($\frac{1}{2}$) und ein Drittel ($\frac{1}{3}$) verschiedene Dinge sind, so kann man sie auch folglich nicht? K. Zusammenzählen. L. Wenn man sie aber doch zusammen zählen will, was muß man vorher mit ihnen thun? K. Man muß sie unter einerlei Benennungen bringen. L. Wie dieß möglich zu machen ist, sollt ihr jezt lernen, darum gebt gehörig acht. —

Wie heißt die erste Theilzahl? K. Ein Zweitel. L. Warum heißt es ein Zweitel? K. Weil das Ganze aus 2 Theilen besteht. L. Wie heißt die zweite Theilzahl? K. Ein Drittel. L. Warum heißt es ein Drittel? K. Weil das Ganze aus 3 Theilen besteht. L. Zerlege einmahl jeden Theil des Zweitel in eben so viele Theile,

als

als das Drittel Ganze zählt; aus wie vielen Theilen besteht jezt das Ganze? K. Aus 6 Theilen. L. Und wie heißt jezt das Ganze, weil es aus 6 Theilen besteht? K. Ein Sechstelganzes. L. Zerlege auch jeden Theil des Drittelganzen in eben so viele Theile weiter, als das Zweitelganze Theile zählt; aus wie vielen Theilen besteht es jezt? K. Aus 6. L. Und heißt daher gleichnahmig mit dem ersten Ganzen? K. Ein Sechstelganzes.

L. Was ist aus dem einen Zweitel geworden, nachdem wir dasselbe eben so wie das zweite Zweitel in drei Theile zerlegt, und dadurch das Ganze aus einem Zweitelganzen in ein Sechstelganzes verwandelt haben? K. Drei Sechstel. L Und aus dem einen Drittel, nachdem wir diesen Theil eben so wie die zwei andern Drittel, welche das Ganze ausmachen, in zwei Hälften weiter zerlegt haben? K. Zwei Sechstel. L. Lassen sich denn nun die drei Sechstel und die zwei Sechstel zusammen zählen? K. Ja, weil sie jezt einerlei Namen führen. L. Wie viel sind drei Sechstel und zwei Sechstel zusammen? K. Fünf Sechstel. L. Und was waren und hießen vorher die drei Sechstel und die zwei Sechstel? K. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$. L. Konnten wir sie da schon zusammen addiren? K. Nein, weil sie verschiedene Nahmen führen. L. Was mußten wir thun, um sie zusammen zu addiren? K. Wir mußten sie unter einerlei Benennung bringen. L. In wie viele Theile mußten wir daher die erste Theilzahl, das Zweitel sowohl, als auch zugleich damit das Theilganze weiter zerlegen? K. In drei Mahl so viele, oder in 6 Theile. L. Warum in drei Mahl so viele? K. Weil

Weil das andere Theilganze aus drei Zahlen besteht. L. Und leztere Zahl, das Drittel, verwandelten wir mit den andern zwei Dritteln, welche das Theilganze ausmachen, wechselseitig in ein Sechstelganzes wodurch? K. Dadurch, daß wir sie in eben so viele Theile weiter zerlegten, als das erste Theilganze Theile zählt. L. Um also Theilzahlen gleichnahmig zu machen, muß man wechselseitig die Theilzahl und das Theilganze in wie viele Theile zerlegen? K. In so viele Theile, als das andere Theilganze Theile enthält. L. Wiederhohle mir das Gesagte, um es deinem Gedächtnisse desto tiefer einzuprägen. K. Um Theilzahlen gleichnahmig zu machen ꝛc. L. Wende diesen von dir aufgefaßten Lehrsatz auf folgende Aufgaben an:

$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ sind unter einerlei Benennung gebracht gleich? $\frac{4}{8}$ und $\frac{2}{8}$. Beweis: Wenn das erste Theilganze in eben so viele Theile weiter zerlegt wird als das andere Theilganze Theile enthält, so werden beide in Achtelsganze verwandelt, wovon die Hälfte $\frac{4}{8}$ und das Viertel $\frac{2}{8}$ ausmacht.

$\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6}$; $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4} = \frac{4}{8} + \frac{6}{8}$.

$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{5}{10} + \frac{6}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{5}{10} + \frac{8}{10}$.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12}$; $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12}$; $\frac{1}{2} + \frac{4}{6} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12}$; $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{6}{12} + \frac{10}{12}$.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{7}{14} + \frac{2}{14}$; $\frac{1}{2} + \frac{2}{7} = \frac{7}{14} + \frac{4}{14}$. u. s. w.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{8}{16} + \frac{2}{16}$; $\frac{1}{2} + \frac{2}{8} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{8}{16} + \frac{6}{16}$; u. s. w.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{2}{18}$; $\frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{9}{18} + \frac{4}{18}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{9} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18}$; u. s. w.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$; $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{4}{12} + \frac{6}{12}$; $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12}$; u. s. w.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12}$; $\frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{8}{12} + \frac{6}{12}$; $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12}$.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20}$; $\frac{2}{4} + \frac{2}{5} = (\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10})\ \frac{10}{20} + \frac{8}{20}$; $\frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{15}{20} + \frac{12}{20}$.

$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{7}{42} + \frac{6}{42}$; $\frac{2}{6} + \frac{2}{7} = (\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{7}{21} + \frac{6}{21})\ \frac{14}{42} + \frac{12}{42}$.

$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{8}{56} + \frac{7}{56}$; $\frac{2}{7} + \frac{2}{8} = (\frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{8}{28} + \frac{7}{28})\ \frac{16}{56} + \frac{14}{56}$.

$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{9}{72} + \frac{8}{72}$; $\frac{3}{8} + \frac{2}{9} = \frac{27}{72} + \frac{16}{72}$; u. s. w.

$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{10}{90} + \frac{9}{90}$; $\frac{2}{9} + \frac{3}{10} = \frac{20}{90} + \frac{27}{90}$; u. s. w.

§. 73.

Fortsetzung mit 3 Theilzahlen.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} = 3 \times 4 = 12 \times 5 = \frac{20}{60}, \frac{15}{16}, \frac{12}{60}$.

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5} = \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{36}{60}$.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8} = 2 \times 5 = 10 \times 8 = \frac{40}{80}, \frac{16}{80}, \frac{10}{80}$.

$\frac{2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8} = 3 \times 7 = 21 \times 8 = \frac{112}{168}, \frac{24}{168}, \frac{63}{168}$.

Anm.

Anm. 1. $\frac{2}{3}$ von 168 wird gefunden, wenn man letztere Zahl in 150 + 18 zerlegt: denn 100 ist $\frac{2}{3}$ von 150; und 12 von 18; 100 + 12 = 112.

2. $\frac{3}{8}$ von 168 wird gefunden, wenn man zuerst das Achtel von 16,0 und von 8 (20+1) gefunden hat, und dann 3 × 21 nimmt.

3. Bei dem mündlichen Rechenunterrichte hat man sich nur auf diese leichtern Aufgaben zu beschränken, weil man hier bloß zur Absicht hat, den jugendlichen Geist auch in dieser Operationsweise zu befähigen. Die schwererern Aufgaben, die es nur wegen der Zahlenmenge sind, werden zum schriftlichen Rechenunterricht aufgespart, wo diese Schwierigkeiten verschwinden. Eben dahin gehören auch Handgriffe, diese Operationsweise abzukürzen.

§. 74.

f. Addition.

1) Mit gleichnahmigen Theilzahlen.

4 Zehntel	4 Drittel	1 Fünftel
5 —	6 —	3 —
6 —	8 —	5 —
7 —	10 —	7 —
8 —	12 —	9 —
9 —	14 —	11 —
39 Zehntel sind = 3 Ganzen und $\frac{9}{10}$.	54 Drittel sind = 18 Ganzen.	36 Fünftel sind = 7 $\frac{1}{5}$.

2)

2) Mit ungleichnahmigen.

Hier müssen zuerst, wie §. 73. gelehrt wurde, die Theilzahlen unter gleiche Benennungen gebracht werden, z. B.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=3\times 4=12\times 5=60.$

$\frac{1}{3}=\frac{20}{60}$	20 Sechziger
$\frac{1}{4}=\frac{15}{60}$	15 — —
$\frac{2}{5}=\frac{24}{60}$	24 — —
	59 Sechziger

$\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+4\times 5=20\times 6=120.$

$\frac{3}{4}=\frac{90}{120}$	90 Hundert und Zwanzigtel
$\frac{3}{5}=\frac{24}{120}$	24 — — — —
$\frac{3}{6}=\frac{60}{120}$	60 — — — —
	174 — — — —

sind gleich 1 Ganzen und $\frac{54}{120}$tel.

§. 75.

g. Multiplikation.

1) Mit ganzen und Theilzahlen.

$6\times\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2$ Ganzen; $6\times\frac{2}{3}=\frac{12}{3}=4$ Ganzen.

$7\times\frac{3}{7}=\frac{21}{7}=3$ Ganzen; $7\times\frac{3}{8}=\frac{21}{8}=2$ Ganzen und $\frac{5}{8}$teln.

$8\times\frac{7}{9}=\frac{56}{9}=6$ Ganzen und $\frac{2}{9}$teln.

$8\times\frac{8}{3}=\frac{64}{3}=21$ Ganzen und $\frac{1}{3}$tel.

2) Mit Theilzahlen allein.

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$. Hier werden die beiden Theilganze zuerst unter einerlei Benennung gebracht, und sodann die beiden Theilzahlen mit einander multiplizirt, das die gesuchte Zahl finden läßt. Weitere Beispiele zu Aufgaben sind noch:

$\frac{2}{7} \times \frac{4}{8} = \frac{8}{56}$; $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{18}{28}$.

Anm. 1) Man überhäufe die Beispiele nicht, weil die Operation an sich den Geist nicht weiter beschäftigen kann, da sie immer dieselbe ist, und vielzählige Aufgaben nur für das schriftliche Rechnen gehören, was wir deßwegen glauben nicht oft genug in Erinnerung bringen zu können.

2) Aus diesem Grunde hat man die Multiplikation mit gemischten Vervielfältigern (Ganzen und Theilzahlen) hier auch ganz übergangen.

§. 76.

h. Subtrakzion.

1) Einer Theilzahl von einer ganzen Zahl.

Z. B. von 1 Apfel soll $\frac{1}{3}$ weggenommen werden, wie viel bleibt? $\frac{2}{3}$, denn 1 Apfel $= \frac{3}{3}$ und

von 3 Drittel
1 — weggenommen, bleibt
2 —

Sollen von 6 Aepfeln $\frac{1}{3}$ Apfel weggenommen werden, so kann man zwar beide Zahlen unter einerlei Benennungen brin-

bringen, wenn man jeden Apfel in 3 Theile, folglich alle 6 Aepfel in $\frac{18}{3}$ theilt, woran, wenn 1 Drittel weggenommen wird, noch $\frac{17}{3}$ oder 5 und $\frac{2}{3}$ Aepfel bleibt. Allein kürzer ist es, nur einen Apfel in Drittel zu zerlegen, und hiervon 1 Drittel zu subtrahiren. Dieß lasse man jedoch die Schüler selbst bemerken.

2. Gleichnahmiger Theilzahlen von einander.

Von 8 Sechstel
3 — abgezogen, bleibt
5 Sechstel.

Von 7 Neunteln; von 4 Fünftel
6 — — 3 —
1 — — 1 —

3. Ungleichnahmiger Theilzahlen.

Diese sind zuerst in gleichnahmige zu verwandeln, z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{5} = \frac{15}{20}$ und $\frac{4}{20}$; von 15 Zwanzigteln
4 — —
11 — —

$\frac{5}{7}$ und $\frac{3}{4} = \frac{24}{28}$ und $\frac{21}{28}$; von 24 Achtundzwanzigteln
21 — — —
3 — — —

$1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ und $\frac{4}{5} = \frac{20}{15}$ und $\frac{12}{15}$; von 20 Fünfzehntel
12 — —
bleiben 8 — —

Anm. Den Lehrern steht frei, hierbei die Linien entweder zu Hülfe zu nehmen, oder Beispiele aus dem Leben zu wählen.

§. 77.

§. 77.

i. Division.

1. Wenn der Theiler eine ganze Zahl, und die Grundzahl eine Theilzahl ist.

Z. B. Eine Mutter hat einen Kuchen in 8 gleiche Stücke geschnitten. Ein Stück hebt sie für den Vater auf, ein anderes für sich; in die übrigen $\frac{6}{8}$tel sollen sich ihre 3 Kinder theilen. Wie viel bekommt jedes davon? $3 : \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$.

2. Im umgekehrten Falle.

Z. B. Wie viel bekomm ich Drittel Aepfel von 4 ganzen Stücken. $\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

3. Wenn Grundzahl und Theiler Theilzahlen sind.

Z. B. Wie oft kann ich $\frac{2}{9}$ von $\frac{8}{9}$ wegnehmen? 4 Mahl.

Anm. Auch hier gilt die Bemerkung, daß diese Divisions-Operationen bei dem schriftlichen Rechnen in weitere Anwendung kommen.

§. 78.

k. Regel detri oder Schlußrechnen.

1. Mit gleichnahmigen Theilzahlen.

Wie $\frac{2}{3}$ sich verhalten zu $\frac{6}{3}$, so verhalten sich $\frac{10}{3}$ zu? $2 : 6$ wie 1×3; $3 \times 10 = 30$. Folglich ist die gesuchte vierte Zahl $\frac{30}{3} = 10$.

2. Mit ungleichnahmigen.

Wie $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{10}{6}$?

Hier müssen zuerst die sämmtlichen Theilzahlen unter einerlei Benennung gebracht werden, nach welcher Operation obiger Ansatz lautet:

$\frac{60}{90} : \frac{72}{90} = \frac{150}{90}$? Nun ist 72 ein Fünftel Mahl grösser als 60; und ein Fünftel von 150 ist 30; $\frac{150}{90} + \frac{30}{90}$ aber ist $\frac{180}{90}$ oder 2 Ganze.

3. Mit ganzen Zahlen, wobei aber während der Operation Theilzahlen vorkommen.

Wenn 5 Aepfel 6 Kreuzer kosten, was kosten 10 Aepfel?

5 verhält sich zu 6 wie $1\frac{1}{5}$; $1 \times 10 = 10$

$$\frac{\frac{1}{5}}{10} = \quad . \quad . \frac{2}{12}$$

Andere Aufgaben dieser Art sind:

$$\overset{(1\frac{2}{5})}{5 : 7} = \overset{(1\frac{2}{5})}{10 : 14} \; . \; \overset{(1\frac{1}{6})}{6 : 7} = \overset{(1\frac{1}{6})}{42 : 49}$$

$$\overset{(1\frac{1}{8})}{8 : 9} = \overset{(1\frac{1}{8})}{12 : 13\frac{1}{2}}$$

$\overset{(4\frac{2}{7})}{7 : 30} = \overset{(4\frac{2}{7})}{15 :} (15 \times 4 = 60;\ \frac{7}{15} = 2\frac{1}{7} \times 2 = 4\frac{2}{7};\ 60 + 4\frac{2}{7} =)\ 64\frac{2}{7}$.

Anm.

Anm. Man sieht aus diesen leztern Aufgaben, wie wichtig für das Schlußrechnen die Theilzahlenrechnung überhaupt ist. Noch besser wird die bildende Methode wegen dieser Anwendung sich bei dem künftigen schriftlichen Unterricht in den beiden folgenden Kursen bewähren.

Ende
des ersten Kursus des Denkrechnens oder der Zahlen-Rechenkunst.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Stephani, Heinrich,

Ausführliche Anweisung zum Rechenunterrichte in Volksschulen nach der bildenden Methode ... Kursus

Bd.: Erster Kursus

Nürnberg 1815

Bibl.Mont. 3650-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10723353-5